

Univerzita Karlova  
Pedagogická fakulta  
Katedra matematiky a didaktiky matematiky

## DIPLOMOVÁ PRÁCE

Řešení optimalizačních úloh na 2. a 3. stupni školy

Solving optimization problems  
in lower and upper secondary school

Jakub Michal

Vedoucí práce: prof. RNDr. Jarmila Novotná, CSc.

Studijní program: Učitelství pro střední školy

Studijní obor: Učitelství všeobecně vzdělávacích předmětů pro  
základní školy a střední školy – matematika

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci na téma Řešení optimalizačních úloh na 2. a 3. stupni školy vypracoval pod vedením vedoucí práce samostatně za použití v práci uvedených pramenů a literatury. Dále prohlašuji, že tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

30. března 2021

.....

podpis

## **Poděkování**

Poděkování patří prof. RNDr. Jarmile Novotné, CSc., za trpělivost, cenné rady, motivaci a za čas, který mi při tvorbě této práce věnovala.

## **Abstrakt**

Tato diplomová práce má za cíl shromáždit a popsat řešení optimalizačních úloh napříč jejich historickým vývojem předcházejícím kalkulu. Dále některé identifikované metody použité v dějinách hledání maxim a minim zobecňuje a blíže pojednává o těch, které jsou vhodné k řešení problémů tohoto druhu na střední, případně i základní, škole. Práce také popisuje vhodnost následovat historický vývoj problému při výuce a některé výhody tohoto přístupu.

Součástí práce je také vyhodnocení experimentu, který zkoumá žákovské porozumění některým jevům v oblasti optimalizace, týkajících se především izoperimetrických úloh, a jejich reakce na vybrané přístupy k řešení.

## **Klíčová slova**

Matematika, optimalizace, extrémy, izoperimetrické úlohy, historie matematiky, didaktika, metody řešení úloh

## **Abstract**

The goal of this diploma thesis is to gather and describe ways the optimisation problems had been solved before the calculus was invented. Some of the methods identified through history are generalised and these which could be utilised at secondary or primary school education are described more in depth. Thesis describes the method, where educator follows historical development of the problem in classroom and what benefits it might bring, as well.

There is a section dedicated to evaluation of experiment which goal was to investigate understanding of pupils to certain concepts in the field of optimisation, mainly concerning isoperimetric problem. It was also focused on the pupils feedback to different approaches of optimisation problem solving.

## **Key Words**

Mathematics, optimisation, extrema, isoperimetric problems, history of mathematics, didactics, methods of problem solving

# Obsah

<b>1</b>	<b>Úvod</b>	<b>8</b>
<b>2</b>	<b>Vymezení důležitých pojmů</b>	<b>10</b>
<b>3</b>	<b>Geometrické nerovnosti</b>	<b>12</b>
<b>4</b>	<b>Historie optimalizačních úloh</b>	<b>17</b>
4.1	Heronova úloha . . . . .	20
4.2	Věty o extrémech trojúhelníku . . . . .	25
4.2.1	Základy – kniha šestá, tvrzení 27. . . . .	27
4.2.2	Schwarzova úloha . . . . .	29
4.2.3	Steinerův problém . . . . .	37
4.3	Isoperimetrické úlohy . . . . .	52
4.3.1	Zenodorův problém . . . . .	52
4.3.2	Problém princezny Dídó . . . . .	61
4.3.3	O kouli a válci – kniha druhá, věta devátá . . . . .	76
4.3.4	Tartagliův problém . . . . .	80
4.4	Brachistochrona . . . . .	83
4.4.1	Snellův zákon . . . . .	86
4.4.2	Metoda nalezení brachistochrony Johanna Bernoulliho . . . . .	89
4.5	Keplerovy vinné sudy a Fermatova metoda . . . . .	94
<b>5</b>	<b>Paralela historického vývoje a výuky matematiky</b>	<b>96</b>
<b>6</b>	<b>Metody řešení optimalizačních úloh</b>	<b>103</b>
6.1	Intuice . . . . .	104
6.2	Využití vlastností fyzického světa . . . . .	106
6.3	Další často používané metody . . . . .	109

<b>7</b>	<b>Rozhovory se žáky na téma optimalizační úlohy</b>	<b>110</b>
7.1	Výzkumný nástroj a výzkumný vzorek . . . . .	111
7.2	Popis otázek . . . . .	112
7.2.1	Otázky řešené intuitivně . . . . .	112
7.2.2	Otázky řešené fyzikálním experimentem . . . . .	113
7.2.3	Otázka řešená užitím nerovnosti . . . . .	119
7.2.4	Úloha s konečně mnoha možnostmi řešení . . . . .	119
7.3	Vyhodnocení rozhovorů se žáky . . . . .	121
7.3.1	Hledání řešení problému Dídó . . . . .	121
7.3.2	Hledání maximálního pravoúhelníku a trojúhelníku při da- ném obvodu . . . . .	124
7.3.3	Hledání brachistochrony . . . . .	126
7.3.4	Steinerův problém a jeho fyzikální modely . . . . .	129
7.3.5	Odvození pomocí nerovnosti . . . . .	131
7.3.6	Úloha s pohybem po schodišti . . . . .	133
<b>8</b>	<b>Závěr</b>	<b>136</b>
<b>9</b>	<b>Seznam použitých informačních zdrojů</b>	<b>139</b>

# 1 Úvod

Již jako žáka střední školy mě velice zaujalo téma optimalizačních úloh. Úlohy jednak nabízejí zajímavé a mnohdy až fascinující výsledky, které není vždy jednoduché na první pohled odhadnout, a zároveň se zabývají problémy, na které je pro žáka naprosto přirozené se ptát. Přesto se tyto úlohy objevují ve škole pouze sporadicky, převážně až v závěru středoškolského studia, nebo se nevyskytují dokonce vůbec. To je zapříčiněno zejména faktem, že aparát vhodný pro hledání minimální či maximální hodnoty funkce v obecném případě – tedy derivace – je jakýmsi vyvrcholením gymnaziálního poznání v matematice, pokud je zařazen do školního vzdělávacího programu (ŠVP).

Na vysoké škole jsem se poté často setkával s jevem, kdy i student, který pojem derivace dobře znal, nebyl schopen tyto úlohy korektně řešit, nebo nerozuměl jednotlivým krokům a postupoval pouze algoritmicky. Často také nesprávně chápal, co vlastně počítá. Uvědomil jsem si tehdy, že v žákovském porozumění této problematice panuje celá řada miskoncepcí a formalismů, které mohou být zapříčiněny náhlým a předčasným příchodem silného nástroje, kterým optimalizační úlohy lze řešit, aniž by si žák uvědomoval, co vlastně počítá.

Protože optimalizační úlohy patří mezi mé oblíbené, všímal jsem si jejich výskytu také v literatuře. Narazil jsem tak na spoustu zajímavých úloh, které je možné řešit i bez využití diferenciálního počtu. Tyto úlohy však nelze snadno algoritmizovat a často je naopak třeba použít nějakou heuristickou metodu, a problém správně uchopit. K tomu, abychom takové metody našli, nám dobře poslouží podívat se na historický vývoj v oblasti řešení úloh tohoto typu.

Cílem této práce je takové historické problémy nalézt a popsat spolu s metodami jejich řešení. Dalším z cílů je některé z těchto metod podrobněji prozkoumat a uvést důvody, proč je dobré je do výuky zařadit, stejně jako popsat důležitost



následování historie matematiky při plánování posloupnosti výuky a hledání vhodných úloh.

Věty jsou v práci záměrně dokazovány pomocí matematiky nezahrnující infinitezimální počet, a text tak může být vhodnou prerekvizitou pro čtenáře, který má zájem o řešení optimalizačních problémů, ale není seznámen s pojmem derivace. Může dále poskytnout motivaci k následnému osvojení si diferenciálního počtu, neboť postupy popsané v této práci jsou mnohdy použitelné pouze v omezených případech, využívají triku, nebo jsou velmi zdlouhavé.

Stejně tak může text posloužit jako zajímavé doplnění a ukázka toho, že i přesto, že derivace je velice silný nástroj, je mnohé problémy v této oblasti možné řešit i elementárněji. Pro někoho mohou tyto postupy představovat také způsob, jak získat do úlohy hlubší vhled.

Posledním z cílů je provést rozhovor se žáky, kteří budou mít za úkol řešit úlohy za využití metod identifikovaných v rámci historie optimalizace, a prozkoumat tak žákovské potíže při použití těchto způsobů řešení, jejich nápady a miskoncepty.

## 2 Vymezení důležitých pojmů

V této kapitole je výčet definic<sup>1</sup> a vět<sup>2</sup> užitých dále v textu.

**Definice 1.** Množina  $M$  definovaná v Eukleidovském prostoru  $E$  je **konvexní** právě tehdy, když pro každé dva její prvky  $A, B \in M$  platí, že celá úsečka  $AB$  leží v množině  $M$ .

**Definice 2. Konvexním obalem** množiny  $M$  rozumíme hranici nejmenší konvexní množiny obsahující celou množinu  $M$ .

**Definice 3. Jednoduchý mnohoúhelník** je takový mnohoúhelník, pro který platí, že žádné dvě jeho nesousedící hrany se neprotínají. Jednoduchý mnohoúhelník dělí rovinu na právě dvě části, z nichž jedna je ohraničená a budeme ji nazývat vnitřek a druhá je neohraničená a nazývá se vnějšek.

**Definice 4. Konvexní mnohoúhelník** je takový mnohoúhelník, pro který platí, že jeho vnitřek je konvexní množinou.

(Pojsl, 1996, s. 1)

**Věta 1.** *Mnohoúhelník  $A$ , jehož hranici tvoří konvexní obal mnohoúhelníku  $B$ , má obsah větší nebo roven obsahu mnohoúhelníku  $B$  a obvod menší nebo roven obvodu mnohoúhelníku  $B$ .*

(Niven, 1981)

**Pozn. 1.** Konvexní obal mnohoúhelníku  $A$  si lze představit například jako gumičku napnutou kolem tohoto mnohoúhelníku.

---

<sup>1</sup>Definice 1–4 jsou převzaty z Pojsl (1996).

<sup>2</sup>Věty v této kapitole jsou ponechány bez důkazu. Důkazy lze nalézt například v odpovídajících zdrojích.

**Věta 2.** Obsah trojúhelníku je možné spočítat podle **Heronova vztahu** jako

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \text{ kde } s = \frac{a+b+c}{2}.$$

**Věta 3.** Podle **Eukleidovy věty o výšce** je trojúhelník  $ABC$  pravoúhlý s pravým úhlem u vrcholu  $C$  právě tehdy, když v něm platí vztah  $v_c^2 = c_a \cdot c_b$ , kde  $v_c$  je výška, jejíž pata  $P$  leží na straně  $c$ , a  $c_a$  je část přepony tvořená úsečkou  $PB$  a  $c_b$  úsečkou  $AP$ .

**Definice 5.** **Křivkou** nazveme množinu  $C \in \mathbb{C}$ , jestliže existuje zobrazení

$$\varphi : \langle a, b \rangle \rightarrow C,$$

intervalu  $\langle a, b \rangle$  na množinu  $C$  splňující:

1.  $\varphi$  je spojitý na  $\langle a, b \rangle$ ,
2.  $\varphi'$  je po částech spojitá na  $\langle a, b \rangle$ , tj. interval  $\langle a, b \rangle$  lze rozdělit na konečně mnoho podintervalů  $\langle a, t_1 \rangle, \langle t_1, t_2 \rangle, \dots, \langle t_n, b \rangle$ , že  $\varphi'$  je spojitá na každém z nich, přičemž v krajních bodech uvažujeme příslušné jednostranné derivace.

(Hamhalter, s. 45, 2017)

**Pozn. 2.** Uzavřená křivka je taková křivka, pro kterou platí  $\varphi(a) = \varphi(b)$  (tedy počáteční bod splývá s koncovým). (Hamhalter, 2017)

**Pozn. 3.** Jednoduchá křivka je taková křivka, u které splývá pouze počáteční a koncový bod a žádné jiné (neprotíná tedy sama sebe). (Hamhalter, 2017)

### 3 Geometrické nerovnosti

V dalším textu budeme k důkazům některých tvrzení a řešení problémů potřebovat používat definice<sup>3</sup> a vztahy, které jsou odvozeny v této kapitole.

**Definice 6. Aritmetickým průměrem** čísel  $a_1, a_2, \dots, a_n$  nazveme číslo  $A$  získané takto:

$$A = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}.$$

**Definice 7. Geometrickým průměrem** nezáporných čísel  $a_1, a_2, \dots, a_n$  nazveme číslo  $G$  získané takto:

$$G = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdot \dots \cdot a_n}.$$

**Věta 4.** *Nechť  $A$  je aritmetickým a  $G$  geometrickým průměrem nezáporných čísel  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Pak platí, že  $A \geq G$  a rovnost nastává právě tehdy, když  $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ .*

*Důkaz.* Důkaz rozdělíme do několika kroků:

1. Pokud všechny členy nejsou stejné, ukážeme, že platí  $A > G$ .

Protože  $a_1, a_2, \dots, a_n$  jsou nezáporná čísla, jsou také průměry  $A$  a  $G$  nezáporné. Umocnění nerovnosti  $A > G$  je proto ekvivalentní úpravou. Umocníme ji na  $n$ -tou a dokážeme platnost ekvivalentního tvrzení  $A^n > G^n$ . Potřebujeme tedy ukázat pravdivost následujícího vztahu:

$$A^n > a_1 a_2 \dots a_n.$$

K tomu využijeme algoritmičtý postup, kdy na pravé straně nahrazujeme nejmenší a největší číslo v součinu tak, jak je popsáno dále. Ostatní čísla ponecháváme beze změny.

---

<sup>3</sup>Definice aritmetického a geometrického průměru jsou formulovány podle Courant, Robbins (1996), stejně tak věta 4, důkaz věty je podle Niven (1981) a Courant Robbins (1996).

Nejmenší číslo  $x \in \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  nahradíme hodnotou  $A$ , tedy aritmetickým průměrem  $n$ -tice čísel, a největší číslo  $y \in \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  nahradíme číslem získaným jako  $x + y - A$ . Protože aritmetický průměr  $x + y - A$  a  $A$  je  $\frac{x+y}{2}$  a ostatní čísla  $n$ -tice zůstala zachována, nezměnil se ani aritmetický průměr celé  $n$ -tice. Rekursivním opakováním tohoto algoritmu postupně nahradíme celou pravou stranu výrazem  $A^n$ .

Nyní stačí ukázat, že součin nových členů nahrazujících součin čísel  $x, y$  je větší než součin právě těchto dvou členů (ostatní členy jsou v každém kroku algoritmu zachovány a nemají tak na změnu velikosti výrazu vliv). Zbývá tedy ukázat, že:

$$xy < A(x + y - A).$$

Pravou stranu roznásobíme a odečteme výraz  $xy$ . Upravíme a získáme nerovnost:  $0 < (A - x)(y - A)$ . Protože aritmetický průměr různých čísel  $A$  vždy leží mezi největší a nejmenší hodnotou, pro niž je určován a zároveň  $x$  je nejmenší prvek  $n$ -tice, je první závorka kladná. Stejně tak je kladná druhá závorka, jelikož  $y$  je největším prvkem a  $A$  je menší než  $y$ . V každé iteraci algoritmu bude opět platit  $xy < A(x + y - A)$ , a tedy platí, že  $A^n > G^n$ , tedy i  $A > G$ .

2. Pokud  $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ , ukážeme, že pak platí  $A = G$ . Prostým dosazením dostáváme:

$$A = \frac{a_1 + a_1 + \dots + a_1}{n} = \frac{n \cdot a_1}{n} = a_1,$$

a také:

$$G = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_1 \cdot \dots \cdot a_1} = \sqrt[n]{a_1^n} = a_1.$$

Pro  $n$ -tici shodných nezáporných čísel tedy platí, že  $A = G$ .

3. Pravdivost tvrzení, že pokud  $A = G$ , pak jsou všechny členy shodné, nejprve ukážeme pro dva členy. Jistě platí, že  $0 \leq (a_1 - a_2)^2$ . Pravou stranu umocníme

a k oběma stranám přičteme člen  $4a_1a_2$ . Dostáváme tak nerovnost  $4a_1a_2 \leq \leq a_1^2 + 2a_1a_2 + a_2^2$ , kterou upravíme na nerovnost:

$$a_1a_2 \leq \left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2.$$

Po odmocnění dostaneme:

$$\sqrt{a_1a_2} \leq \frac{a_1 + a_2}{2}.$$

Rovnost v  $0 \leq (a_1 - a_2)^2$  nastane právě tehdy, když  $a_1 = a_2$ . Proto pro  $a_1 \neq a_2$  platí, že  $\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^2 > a_1a_2$ .

Dále předpokládejme, že  $A = G$  a mezi čísly  $a_1, \dots, a_n$  existuje dvojice čísel, která jsou různá. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že jsou to čísla  $a_1, a_2$ .

Označíme aritmetický průměr těchto členů  $\frac{a_1+a_2}{2}$  písmenem  $u$  a zavedeme novou  $n$ -tici čísel  $u, u, a_3, a_4, \dots, a_n$ . Platí:

$$\frac{u + u + a_3 + \dots + a_n}{n} = \frac{\frac{a_1+a_2}{2} + \frac{a_1+a_2}{2} + a_3 + \dots + a_n}{n} = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}.$$

Aritmetický průměr se nahrazením členů  $a_1$  a  $a_2$  jejich průměry nezměnil.

Dále víme, že:

$$uu = \frac{a_1 + a_2}{2} \frac{a_1 + a_2}{2} = \left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2 > a_1a_2.$$

Z posledního vztahu v kombinaci s předpokladem docházíme k následujícímu závěru:

$$\frac{u + u + a_3 + \dots + a_n}{n} = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = \sqrt[n]{a_1a_2 \dots a_n} < \sqrt[n]{uu \dots a_n},$$

kteřý je ve sporu s dokázanou nerovností v prvním kroku. Jestliže se aritmetický a geometrický průměr rovnají, musí se proto všechny členy rovnat.

□

(Niven, 1981; Mickep, 2015)

**Pozn. 4.** Algoritmus popsaný v důkazu věty 4 pro lepší ilustraci ukážeme na následujícím příkladu s konkrétními hodnotami:

$$\{1, 4, 5, 7, 8\} \rightarrow \{5, 4, 5, 7, 4\} \rightarrow \{5, 5, 5, 6, 4\} \rightarrow \{5, 5, 5, 5, 5\}.$$

Na příkladu lze snadno nahlédnout, že součin čísel v množině vpravo od šipky je vždy větší, než vlevo od téže šipky.

**Lemma 1.** Pro  $n$ -tici nezáporných čísel  $a_1, a_2, \dots, a_n$  platí, že  $a_1^n + a_2^n + \dots + a_n^n \geq \geq na_1a_2 \dots a_n$ . Rovnost nastává právě tehdy, když platí  $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ .

(Niven, 1981)

*Důkaz.* K důkazu použijeme větu 4, kdy jako členy volíme  $a_1^n, a_2^n, \dots, a_n^n$ . Po dosazení dostáváme:

$$\frac{a_1^n + \dots + a_n^n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1^n \cdot \dots \cdot a_n^n},$$

$$a_1^n + \dots + a_n^n \geq na_1a_2 \dots a_n.$$

□

**Pozn. 5.** Nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem budeme používat i ve speciálním případě, kdy množina čísel, z nichž průměry určujeme, má mohutnost dvě. Pro takové případy může být vhodnější, zejména pro žáky, větu vyslovit a důkaz nerovnosti provést za použití geometrických vztahů takto:

**Věta 5.** Pro dvě nezáporná čísla platí:

$$\frac{a_1 + a_2}{2} \geq \sqrt{a_1a_2}.$$

*Důkaz.* Necht vzdálenost  $|AP|$  v obrázku 1<sup>4</sup> na straně 16 je  $a_1$  a vzdálenost  $|PB|$  je  $a_2$ . Aritmetickým průměrem  $a_1, a_2$  je polovina součtu jejich délek. Tedy  $\frac{|AB|}{2} = |AS_{AB}|$ , kde  $S_{AB}$  značí střed úsečky  $AB$ .

<sup>4</sup>Není-li u obrázku řečeno jinak, jedná se o vlastní obrázek.

V bodě  $P$  vztyčíme kolmici. Sestrojíme kružnici  $k$  se středem  $S_{AB}$  a průměrem  $AB$ . Průnik kružnice  $k$  a kolmice z bodu  $P$  označíme  $E$ . Podle *Eukleidovy věty o výšce* (viz věta 3) platí, že délka úsečky  $PE$  je rovna odmocnině ze součinu délek úseček  $AP$  a  $PB$ . Tedy platí:

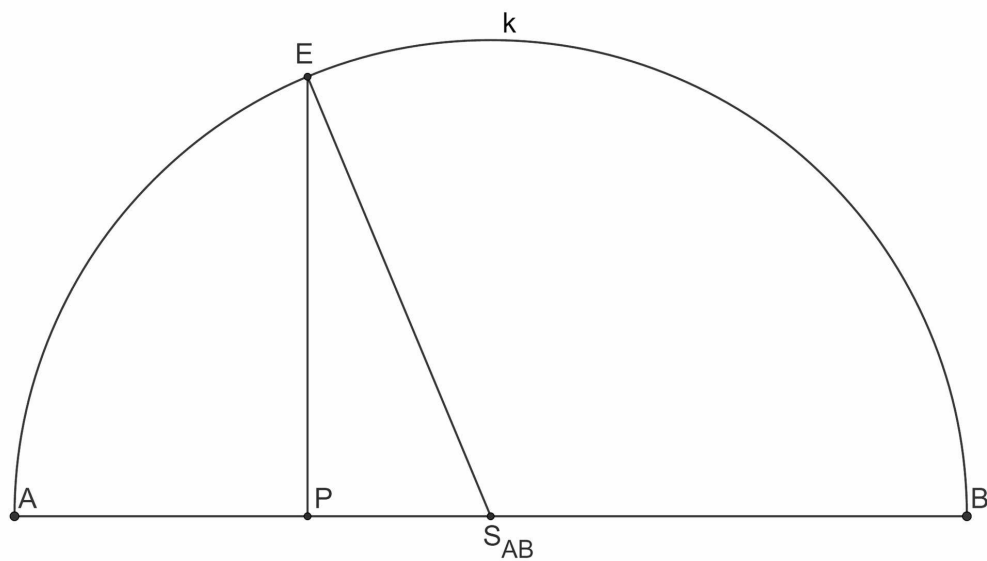
$$|PE|^2 = |AP||PB|,$$

neboli:

$$|PE| = \sqrt{a_1 a_2}.$$

Délka úsečky  $ES_{AB}$  je stejná jako délka úsečky  $AS_{AB}$ , neboť se jedná o poloměry kružnice  $k$ . Také platí, že  $ES_{AB}$  je přeponou pravoúhlého trojúhelníku  $EPS_{AB}$ , a je tak delší než každá z odvěsen. Proto platí, že  $|ES_{AB}| \geq |PE|$ . Tedy dostáváme dokazovanou nerovnost:

$$\frac{a_1 + a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 a_2}.$$



Obrázek 1: Geometrický důkaz věty 5

□



## 4 Historie optimalizačních úloh

Hledání optimálního řešení vychází podle některých matematiků, jako například Eulera nebo Grötschela, ze samotné povahy přírody (Felber, 1908; Grötschel, 2012). Nejen že se mnoho přírodních zákonů a jevů, jak je dále popsáno, snaží zaujmout optimální stav (Courant a Robbins (1996) uvádějí jako příklad mýdlové bubliny, které zaujmou tvar, jenž je nejméně energeticky náročný), ale Euler krajnosti stavěl dokonce až do významu pro svět definujících entit:

*„Ježto zařízení celého světa jest nejdokonalejší a poněvadž pochází od nejmoudřejšího Tvůrce, nenastane nic ve světě, z čehož by neplynulo maximum neb minimum nějaké vlastnosti; proto nemůže býti o tom pochyby, že všechny účinky mohou se odvoditi methodou maxim a minim z účelů, jakož i z působících příčin.“*

Leonhard Euler, 1886 (Felber, 1908, s. 290–291)

Stejně tak živá příroda<sup>5</sup>, ať už intuitivně nebo právě díky zkušenosti s fyzikálními jevy, vyhledává nejlepší možná řešení (včely například staví šestiúhelníkové plástve, což je optimum mezi spotřebou vosku a objemem pojmutého medu (Niven, 1981)). Je pravděpodobné, že první otázky, které hledaly krajní hodnotu, předcházejí v historii i samotnému zrodu čísel. Jak Schrijver (2012) zmiňuje, úloha hledání optimální cesty byla důležitá pro přežití nejen primitivních společností (pro které optimum, mimo času a délky, mohla být také například bezpečnost a další faktory), ale také zvířecích druhů.

---

<sup>5</sup>Zkoumání živé přírody a intuice psů v oblasti optimalizace se věnuje ve článku *Do Dogs Know Calculus?* Pennings (2003). Zkoumal, jakou cestu zvolí pes běžící pro míček unášený řekou. Pes se na souši pohybuje jinou rychlostí, než ve vodě. Podobné úlohy se objevují například ve středoškolských učebnicích a sbírkách úloh (Zhouf, 2007). Výsledkem, který Pennings popisuje, je, že pes volí cestu velmi blízkou optimální trase.

Navzdory dlouhé potřebě řešit takové otázky se obecné metody pro řešení problémů tohoto typu začaly objevovat teprve před cca 300 lety. Do té doby se úlohy mající za úkol nalézt maximum nebo minimum neřešily žádnou obecnou metodou, ale nejrozličnějšími heuristickými metodami. (Tikhomirov, 1986)

Jak uvádí Courant a Robbins (1996), už v antice byly známy skutečnosti, že úsečka je nejkratší vzdáleností mezi dvěma body v rovině, ortodroma (také známa jako hlavní kružnice) nejkratší vzdáleností mezi dvěma body na sféře a také, že tělesem s maximálním objemem při daném povrchu je koule. Přesto většina těchto faktů vycházela spíše ze zkušenosti a intuice. Řekové většinu z nich nedokazovali (Eukleidés ovšem dokázal například fakt, že největším pravoúhelníkem daného obvodu je čtverec (Servít, 1907)). O intuici při řešení optimalizačních úloh se zmiňuje i Niven (1981), když se řečnický ptá, proč se problém hledání křivky o největším obsahu při daném obvodu stal slavným, když jeho řešení většina lidí bude považovat za samozřejmé. Na to odpovídá, že intuice je něco, co je třeba ověřovat a zkoumat, protože bez důkazu může docházet k nejrozličnějším percepčním omylům. K podobnému závěru přišel již v sedmnáctém století Descartes v díle *Meditace o první filosofii*, když říká:

*„Cokoli jsem dosud připouštěl jako nejvíce pravdivé, jsem přijal ze smyslů nebo skrze smysly; postřehl jsem ale, že smysly občas klamou – a je rozvážné nikdy nedůvěřovat bezvýhradně těm, kdo nás byt jednou podvedli.“*

René Descartes, 1641 (Descartes, 2003, s. 23)

Samotné zkoumání existence řešení tohoto problému také velkou měrou přispělo k rozvoji existenčních důkazů v matematice. (Niven, 1981; Tikhomirov, 1986)

Přestože za první zdokumentované řešení optimalizační úlohy bývá považován *problém princezny Dídó* (Tikhomirov 1986; Blåsjö, 2005), začneme problémem

jednodušším, pocházejícím přibližně z prvního století našeho letopočtu (Courant, Robbins, 1996; Rojo, Bloch, 2018) a sice *Heronovou úlohou*. Důvod, proč není zvolen chronologický postup, je ten, že s výsledkem *Heronovy úlohy* a větami z něj odvozenými budeme dále pracovat v dalších důkazech. To platí i pro další věty.

Historie optimalizace by měla nastínit nejen důvody, proč byl vznik diferenciálního počtu důležitý, ale naopak také prohloubit vhled do problematiky, kdy pouhé hledání minima funkce derivováním může zastřít některé vztahy a zákonitosti, které jsou heuristickými přístupy k řešení lépe viditelné. Popis historie má za cíl také ukázat, že je vhodné znát i některé, dnes již překonané metody, které nejsou dnešní optikou zcela korektní. Tyto znalosti a fakta je pak možné využít při výuce, kdy žákovské poznání problematiky bude paralelou historického vývoje samotné látky. Blíže o využití historického kontextu během výuky a při jejím plánování pojednává kapitola 5.

## 4.1 Heronova úloha

Již v Eukleidově díle *Optics* je postulováno, že světlo se šíří v paprscích (Burton, 1945). Také zde můžeme nalézt řešení problému, kdy Eukleidés hledá výšku daného bodu nad zemí, když nesvítí slunce. Pro její vyřešení použije již okolo roku 300 před naším letopočtem faktu, že úhel dopadu paprsku na rovinné zrcadlo je stejný jako úhel odrazu. (Burton, 1945)

Heron ve svém díle tvrzení o dopadu a odrazu paprsku dokázal pomocí minimalizace času, po který se paprsek pohybuje. Vychází tak z Aristotelova tvrzení, že „příroda nedělá nic nadarmo“. To také zmiňuje Damianus, který v šestém století napsal k dílu komentář. Popisuje, že Heronova myšlenka je taková, že pokud příroda nechce, aby se paprsek světla bez důvodu klikatil, pak se zalomí ve shodných úhlech. (Rojo, Bloch, 2018; Tikhomirov, 1986)

Heron věřil, že světlo se šíří konečnou rovnoměrnou rychlostí, a že to, čemu je udělen pohyb, se pohybuje v přímce (příklad uvádí na šípu vystřeleném z luku). Odůvodňuje to tím, že „síla“<sup>6</sup> pohybující tělesem se snaží těleso udržet na nejkratší možné cestě a nemůže si dovolit ztrácet čas pomalejším pohybem, tedy pohybem po delší cestě. A nejkratší cesta mezi dvěma body je přímka. (Rojo, Bloch, 2018)

To Herona vedlo k hledání nejkratší cesty paprsku mezi body  $A, B$ , který je odražen od rovinného zrcadla.

**Definice 8. Heronovým problémem** rozumíme úlohu, kdy v jedné polorovině s hraniční přímkou  $p$  je dána dvojice bodů  $A, B$  a hledáme bod  $P \in p$  takový, aby platilo, že součet vzdáleností  $|AP| + |PB|$  je minimální.

Bod  $P$ , který tuto podmínku splňuje, nazýváme **řešením Heronova problému**.

---

<sup>6</sup>Po vystřelení šípu z luku již tětíva žádnou silou na šíp nepůsobí. Na šíp nepůsobí žádná síla, která by jej udržovala v pohybu. Naopak na šíp působí odporová síla a přitažlivá síla Země. . .

**Věta 6.** *Vzdálenost  $|AP| + |PB|$  je minimální právě tehdy, když bod  $P$  náleží průniku přímky  $p$  a úsečky  $A'B$ , kde  $A'$  je obraz bodu  $A$  v osové souměrnosti podle přímky  $p$  (znázorněno na obrázku 2 na straně 22).*

*Důkaz.* Z trojúhelníkové nerovnosti víme, že:

1. pro všechna  $P$  platí  $|A'B| \leq |A'P| + |PB|$ ,
2.  $|A'B| = |A'P| + |PB| \iff P \in A'B$ .

Z vlastností osové souměrnosti také víme, že pro všechna  $P \in p$  platí:

$$|AP| = |A'P|,$$

a proto pro všechna  $P \in p$  platí:

$$|A'B| \leq |AP| + |PB|,$$

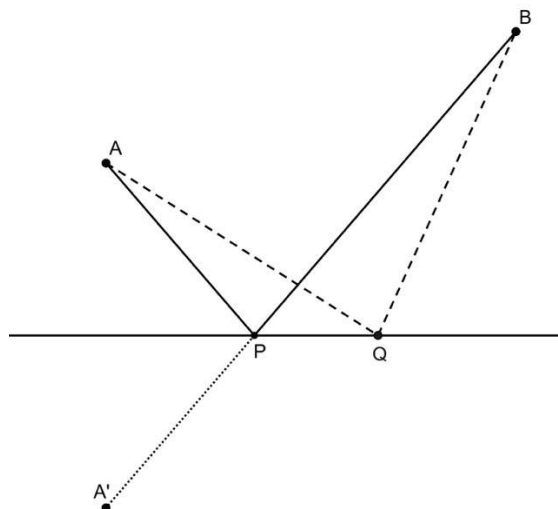
a pro všechna  $P \in A'B \wedge P \in p$  platí:

$$|A'B| = |AP| + |PB|.$$

Náleží-li proto  $P$  průsečíku úsečky  $A'B$  a přímky  $p$ , je vzdálenost  $|AP| + |PB|$  nejmenší možná.

Pokud naopak platí, že vzdálenost  $|AP| + |PB|$  je minimální, pak je nejmenší i vzdálenost  $|A'P| + |PB|$ . Protože je  $|A'P| + |PB|$  minimální, platí  $|A'P| + |PB| = |A'B|$ , a tedy  $P$  náleží průniku  $A'B$  a  $p$ .  $\square$

**Věta 7.** *Nechť  $P$  je bod, který je řešením Heronova problému (věta 6). Pak úhel, který svírá hraniční přímka a rameno  $PA$ , je shodný s úhlem, který svírá hraniční přímka a rameno  $PB$ .*



Obrázek 2: Ilustrace Heronovy úlohy

*Důkaz.* Úhel  $\alpha$ , který svírá hraniční přímka s úsečkou  $PB$ , je shodný s úhlem  $\beta$ , neboť se jedná o vrcholové úhly (viz obrázek 3 na straně 23). Úhel  $\beta$  je shodný s úhlem  $\gamma$ , protože rameno  $A'P$  vzniklo jako obraz ve shodném zobrazení (osové souměrnosti) ramena  $AP$ , a tedy úhly  $\beta$  a  $\gamma$  jsou také shodné. Proto je i úhel  $\alpha$  stejně veliký jako úhel  $\gamma$ .  $\square$

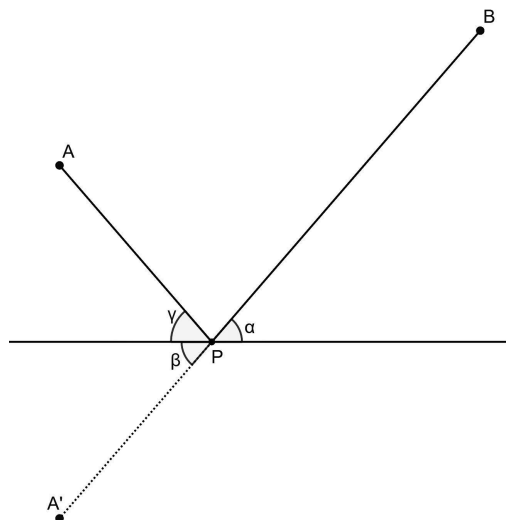
*Heronův problém* je úzce spojen s elipsou a jak je dále ukázáno, je také vhodným nástrojem pro odvození vlastnosti úhlu sevřeného tečnou elipsy a jejími průvodiči.

Označíme-li minimální vzdálenost  $|AP| + |PB|$ , získanou jako řešení *Heronova problému*,  $2a$ , pak množina všech bodů  $P$  splňující tuto vlastnost je elipsa s délkou hlavní poloosy  $a$  (viz obrázek 4 na straně 24). (Courant, Robbins, 1996)

Navíc také platí věta:

**Věta 8.** *Hraniční přímka  $p$  z věty 6 je tečnou k elipse (popsané v předchozím odstavci) v bodě  $P$ .*

*Důkaz.* Víme, že bod  $P$  na elipse leží. Přímka  $p$  tak může být tečnou, nebo sečnou. Pokud by byla sečnou, pak by existovala úsečka  $PQ$  na přímce  $p$  taková, že celá



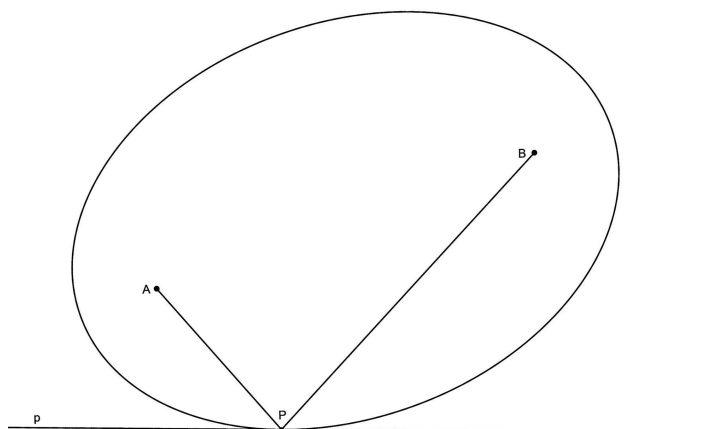
Obrázek 3: Ilustrace k důkazu věty 7

leží uvnitř elipsy (viz obrázek 5 na straně 24). Pro vnitřní body  $X$  této úsečky platí, že  $|AX| + |XB|$  je menší než  $2a$  (protože rovnost platí pro body na elipse a pro body vně je vzdálenost větší).

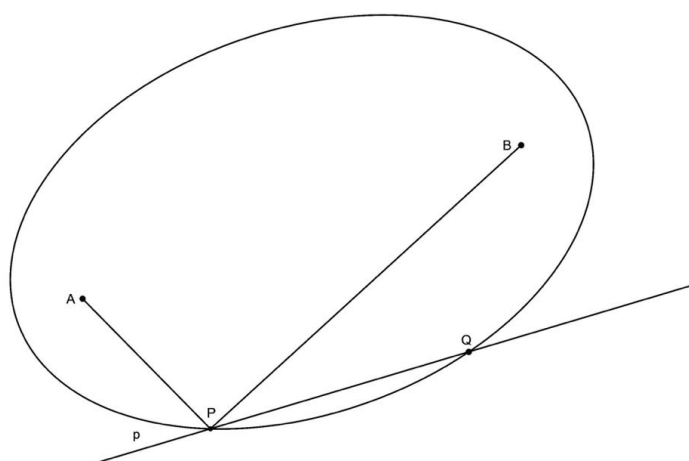
Protože ale vzdálenost  $|AP| + |PB|$  je nejkratší právě pro  $P \in p$ , platí, že pro všechny body různé od  $P$  na  $p$  je součet vzdáleností od ohnisek větší. To je ve sporu s tím, že by existovala úsečka uvnitř elipsy. Přímka  $p$  je proto tečnou.  $\square$

(Courant, Robbins, 1996)

**Pozn. 6.** Z věty 7 a věty 8 plyne, že tečna elipsy svírá s oběma průvodiči elipsy shodný úhel. (Courant, Robbins, 1996)



Obrázek 4: *Heronův problém* a elipsa



Obrázek 5: Příklad, kdy předpokládáme, že  $p$  je sečnou



## 4.2 Věty o extrémech trojúhelníku

**Věta 9.** *Rovnostranný trojúhelník je trojúhelníkem s největším obsahem pro daný obvod.*

*Důkaz.* K důkazu využijeme *Heronův vzorec* (viz věta 2) pro výpočet obsahu trojúhelníku pomocí délek jeho stran. Nechť  $a, b, c$  jsou délky stran trojúhelníku takové, že  $a + b + c = k$ , kde  $k$  je daný obvod.

Podle Heronova vzorce je obsah trojúhelníku možné spočítat takto:

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

kde  $s$  je polovina obvodu, tedy  $\frac{a+b+c}{2}$ . Funkce nabývá svého maxima, je-li výraz pod odmocninou maximální. Hledáme tedy maximum výrazu  $s(s-a)(s-b)(s-c)$ . Protože  $s$  je konstantní, stačí maximalizovat součin tří závorek.

Součtem závorek dostáváme:

$$(s-a) + (s-b) + (s-c) = 3s - (a+b+c) = 3s - 2s = s.$$

Podle věty 4 platí:

$$s = (s-a) + (s-b) + (s-c) \geq 3\sqrt[3]{(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Výraz na pravé straně je menší nebo roven konstantě  $s$ . Maximální tedy bude právě tehdy, když nastane rovnost. Podle věty 4 víme, že se tak děje právě tehdy, když jsou si čísla, jejichž průměr určujeme, rovna; tedy když  $s-a = s-b = s-c$ , což nastává pouze v případě, kdy  $a = b = c$ . Trojúhelník, jehož délky stran se rovnají, je rovnostranný. □

(Niven, 1981)

**Pozn. 7.** Větu 9 v kapitole věnující se isoperimetrickým úlohám je zobecněna pro  $n$ -úhelníky. Přesto zde uvádíme důkaz věty slabší, jelikož je přehlednější a kratší.

**Věta 10.** *Ze všech trojúhelníků s daným obsahem má nejmenší obvod rovnostranný.*

*Důkaz.* Věta je ekvivalentní<sup>7</sup> s větou 9. □

(Niven, 1981)

**Věta 11.** *Trojúhelník, jehož dvě délky stran jsou dány a třetí můžeme volit libovolně tak, aby platila trojúhelníková nerovnost, má největší obsah právě tehdy, když je pravoúhlý.*

*Důkaz.* Obsah trojúhelníku je možné spočítat jako součin dvou délek jeho stran násobený sinem úhlu, který tyto strany svírají. Ptáme se tedy, kdy výraz:

$$S = ab \sin \alpha,$$

nabývá maximální hodnoty. Protože  $a, b$  jsou konstanty, můžeme maximalizovat pouze funkci sinus. Ta nabývá na intervalu  $(0^\circ, 180^\circ)$  maxima pro hodnotu  $90^\circ$ . Trojúhelník má tedy maximální obsah, je-li pravoúhlý. □

(Niven, 1981)

**Pozn. 8.** Věta 11 neříká, že trojúhelník s daným obvodem je maximální, pokud je pravoúhlý (z věty 19 již víme, že takovým je rovnostranný), a nejedná se tak o isoperimetrickou vlastnost. Obvod je naopak v tomto případě proměnnou, s jejíž změnou se mění i úhel, a právě pro pravoúhlý dostáváme maximální obsah.

---

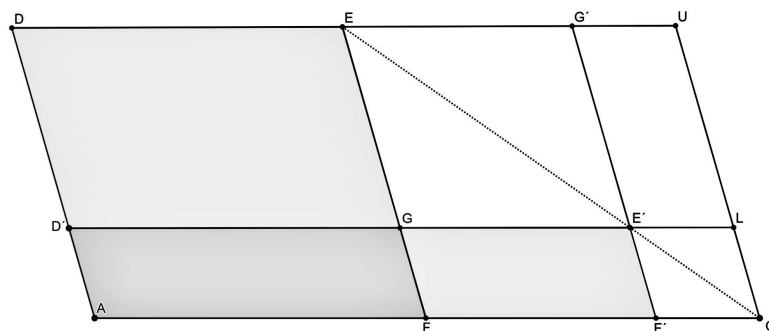
<sup>7</sup>Obecně platí logická ekvivalence mezi úlohou hledající při daném obsahu minimální obvod a úlohou hledající při daném obvodu maximální obsah. Analogické tvrzení lze vyslovit v prostoru pro povrch a objem.

### 4.2.1 Základy – kniha šestá, tvrzení 27.

Další věta se sama o sobě netýká trojúhelníku, ale její důsledek již ano. Najdeme ji v Eukleidových *Základech* (Servít, 1907). Eukleidés se v celém díle složeném ze třinácti knih zabývá pouze jednou optimalizační úlohou. Tu lze najít v šesté knize jako 27. tvrzení:

**Věta 12.** „Ze všech rovnoběžníků k téže přímce přistavených, jimž scházejí doplňovací rovnoběžníky podobné a stejnohlé s tím, jenž sestojen jest na polovině, největší jest rovnoběžník přistavený k polovině, podobný doplňku.“

(Servít, 1907, s. 99)



Obrázek 6: Znázornění věty 12

**Pozn. 9.** Věta říká, že pokud v libovolném rovnoběžníku  $ACUD$  (viz obrázek 6) sestojíme rovnoběžník  $FCUE$  tak, že  $F$  leží uprostřed strany  $AC$  a na jeho úhlopříčce  $CE$  umístíme bod  $E'$ , pak rovnoběžník, jehož strany budou rovnoběžné s odpovídajícími stranami rovnoběžníku  $ACUD$  a bude mít vrcholy v bodech  $A$  a  $E'$  (v obrázku  $AF'E'D'$ ) bude maximální, jestliže bod  $E'$  leží v polovině strany  $UD$ .

*Důkaz.* Chceme ukázat, že rovnoběžník  $AFED$ , sestrojený nad polovinou délky  $AC$  je větší, než každý rovnoběžník  $AF'E'D'$  s vrcholem  $E'$  ležícím v jiném, než krajním bodu úsečky  $CE$ , kde  $E$  je střed strany  $UD$ .

Průnik přímky  $D'E'$  a úsečky  $CU$  označíme  $L$ . Průnik přímky  $F'E'$  a úsečky  $UD$  označíme  $G'$ .

Úhlopříčka  $CE$  dělí rovnoběžník  $FCUE$  na dvě shodné části. Na dvě poloviny  $CE$  dělí také rovnoběžníky  $F'CLE'$  a  $GE'G'E$ . Obsah trojúhelníku  $FCE$  je shodný s obsahem trojúhelníku  $CEU$  a protože oba jsou tvořeny dvěma dvojicemi shodných trojúhelníků a jednou dvojicí rovnoběžníků, musejí i obsahy rovnoběžníků  $FF'E'G$  a  $E'LUG'$  být shodné.

Proto také platí, že obsah  $FCLG$  je stejný jako obsah  $F'CUG'$ . Víme také, že  $AFGD'$  je shodný s  $FCLG$ . Proto platí:

$$S_{F'CUG'} = S_{FCLG} = S_{AFGD'},$$

proto také:

$$S_{F'CUG'} + S_{FF'E'G} = S_{AFGD'} + S_{FF'E'G}.$$

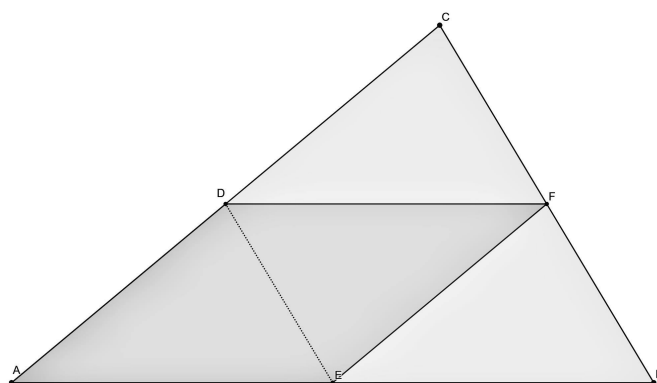
Z tohoto a z faktu, že  $S_{AFED} = S_{FCUE}$ , lze dojít k závěru:

$$S_{AFED} = S_{FCUE} > S_{F'CUG'} + S_{FF'E'G} = S_{AFGD'} + S_{FF'E'G} = S_{AF'E'D'}.$$

Platí tedy, že rovnoběžník je maximální, když je zkonstruován nad polovinou délky  $AC$ . □

(Servít, 1907)

**Pozn. 10.** Důsledkem věty 12 je tvrzení, že největší rovnoběžník vepsaný trojúhelníku  $ABC$  je takový, jehož dva vrcholy leží v polovinách stran trojúhelníku a dvě jeho stany jsou středními příčkami tohoto trojúhelníku. (V obrázku 7 na stránce 29 je to rovnoběžník  $AEFD$ , přičemž trojúhelník  $DEF$  je příčkový.) (Tikhomirov, 1986)



Obrázek 7: Ilustrace k poznámce 10

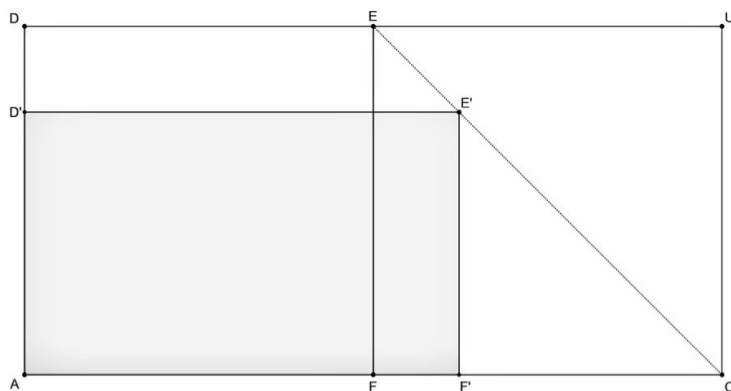
**Pozn. 11.** Nezáleží, který ze tří rovnoběžníků zvolíme. Maximální obsah budou mít všechny tři, tedy  $S_{AEFD} = S_{DEBF} = S_{EFC D}$ . To je důsledkem faktu, že střední příčky trojúhelník dělí na čtyři shodné trojúhelníky.

**Pozn. 12.** Další významný důsledek věty 12 zmiňuje Toeplitz (2007). Rovnoběžník nad  $AC$  sestojíme tak, že se jedná o obdélník, jehož délka kratší strany je rovna polovině délky strany  $AC$  (viz obrázek 8 na straně 30). Potom pro všechny obdélníky s vrcholem  $E'$  na  $CE$  platí, že mají stejný obvod (o co se zmenší délka jedné strany, o to se zvětší délka druhé). Důsledkem věty 12 pak je, že ze všech pravouhelníků daného obvodu je největší čtverec (v obrázku 8 na straně 30 je to čtverec  $AFED$ ). Jedná se o řešení tzv. isoperimetrické úlohy (viz kapitola 4.3).

#### 4.2.2 Schwarzova úloha

Dalším matematikem, který se zabýval optimalizačními úlohami souvisejícími s trojúhelníkem, byl v devatenáctém století *Schwarz* (Courant, Robbins, 1996). Jeho věta se týká trojúhelníku vepsaného do trojúhelníku:

**Definice 9.** Řekneme, že **trojúhelník  $KLM$  je vepsaný do trojúhelníku  $ABC$**  právě tehdy, když  $K, L, M$  jsou vnitřní body stran trojúhelníku  $ABC$  a žádné dva z nich neleží na stejné straně trojúhelníku  $ABC$ .



Obrázek 8: Největším pravoúhelníkem daného obvodu je čtverec

Větu, kterou *Schwarz* dokázal, bychom mohli formulovat takto:

**Věta 13.** *Trojúhelník  $KLM$  vepsaný ostroúhlému trojúhelníku  $ABC$  tak, že jeho vrcholy jsou patami výšek, má nejmenší možný obvod, jaký může vepsaný trojúhelník mít.*

(Courant, Robbins, 1996)

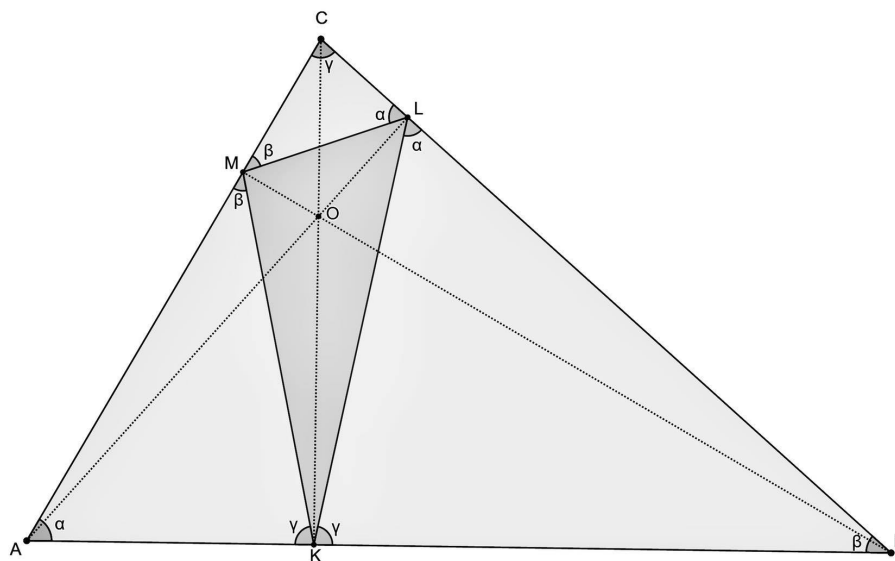
**Definice 10.** Trojúhelník  $KLM$  z věty 13 se nazývá **výškovým trojúhelníkem** trojúhelníku  $ABC$ .

Před samotným důkazem věty 13 dokážeme následující lemma:

**Lemma 2.** *Nechť  $ABC$  je ostroúhlý trojúhelník a  $KLM$  je jeho výškovým trojúhelníkem. Pak platí, že úhel u vrcholu trojúhelníku  $ABC$  je shodný s úhlem, který svírá strana výškového trojúhelníku  $KLM$  s protilehlou stranou k danému vrcholu trojúhelníku  $ABC$  (viz obrázek 9 na stránce 31).*

(Courant, Robbins, 1996)

*Důkaz.* Zaměříme se nejprve na čtyřúhelník  $AKOM$ , kde  $O$  je ortocentrem trojúhelníku  $ABC$ . Úhly  $AKO$  a  $OMA$  jsou oba pravé, neboť body  $K$  a  $M$  jsou patami



Obrázek 9: Znázornění lemmatu 2

výšek. Platí tak, že součet protilehlých úhlů čtyřúhelníku  $AKOM$ , je roven  $180^\circ$ . Proto je čtyřúhelník tětiový, tedy lze mu opsat kružnici.

Úhly  $MAO$  a  $MKO$  jsou shodné, protože se jedná o dva obvodové úhly příslušné stejnému oblouku  $MO$  kružnice opsané čtyřúhelníku  $AKOM$ .

Trojúhelník  $ALC$  je pravoúhlý, protože  $L$  je patou výšky na stranu  $BC$ . Úhel  $\gamma$  u vrcholu  $C$  je tak roven  $90^\circ - |\angle MAO|$ . Velikost úhlu  $AKM$  je rovna velikosti  $90^\circ - |\angle MKO|$ . Protože  $|\angle MAO| = |\angle MKO|$ , platí, že úhel  $AKM$  má stejnou velikost jako úhel  $\gamma$ .

Obdobně, pomocí čtyřúhelníku  $BLOK$ , lze ukázat rovnost úhlu  $\gamma$  a úhlu  $LKB$ . Stejný postup lze aplikovat i pro zbývající úhly.  $\square$

(Courant, Robbins, 1996)

Důsledkem lemmatu 2, který využijeme k důkazu *Schwarzovy věty* (věta 13), je, že pokud úsečku  $MK$  zobrazíme v osové souměrnosti s osou souměrnosti, na

níž leží úsečka  $AC$  (vztahujeme k obrázku 9 na straně 31), pak obraz úsečky  $MK$  bude ležet na polopřímce  $LM$ . (Courant, Robbins, 1996)

*Důkaz.* Chceme ukázat, že výškový trojúhelník  $KLM$  má nejmenší obvod z trojúhelníků vepsaných do  $ABC$  (věta 13).

Uvažujme další trojúhelník  $XYZ$  vepsaný do  $ABC$  tak, že není výškový. Trojúhelník  $ABC$  s dvojicí vepsaných trojúhelníků  $KLM$  a  $XYZ$  zobrazíme opakovaně podle os souměrnosti volených v tomto pořadí, kde index u bodu určuje pořadí, kolikátým obrazem vzoru bod je (viz obrázek 10 na straně 33):

1. Osa je přímka  $AC$ .
2. Osa je přímka  $A_1B_1$ .
3. Osa je přímka  $B_2C_2$ .
4. Osa je přímka  $A_3C_3$ .
5. Osa je přímka  $A_4B_4$ .

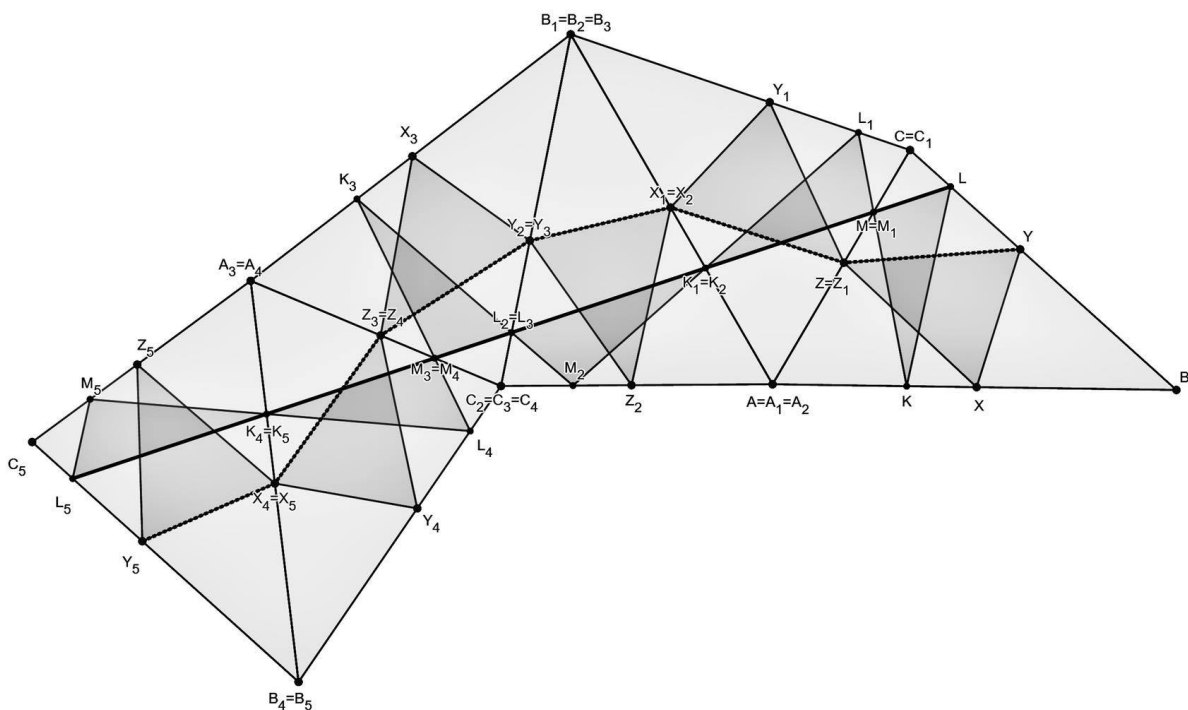
Díky důsledku lemmatu 2 víme, že touto volbou osových souměrností se vždy jedna ze stran výškového trojúhelníku zobrazí do přímky, na které ležela jedna ze stran výškového trojúhelníku před zobrazením. Na obrázku 10 na straně 33 proto vznikla úsečka  $LL_5$ . Úsečka se skládá ze šesti dílů, které všechny mají délku nějaké ze stran trojúhelníku  $KLM$ . Jsou to díly:  $LM, M_1K_1, K_2L_2, L_3M_3, M_4K_4, K_5L_5$ . Protože osová souměrnost zachovává délky, platí:

$$\begin{aligned} |LM| + |M_1K_1| + |K_2L_2| + |L_3M_3| + |M_4K_4| + |K_5L_5| = \\ = |LM| + |MK| + |KL| + |LM| + |MK| + |KL| \end{aligned}$$

Úsečka  $LL_5$  má tedy délku rovnou dvojnásobku obvodu trojúhelníku  $KLM$ .

Úsečka  $BC$  se zobrazila v osové souměrnosti podle  $AC$  na úsečku otočenou o dvojnásobek úhlu u vrcholu  $\gamma$  (ve směru hodinových ručiček). V souměrnosti



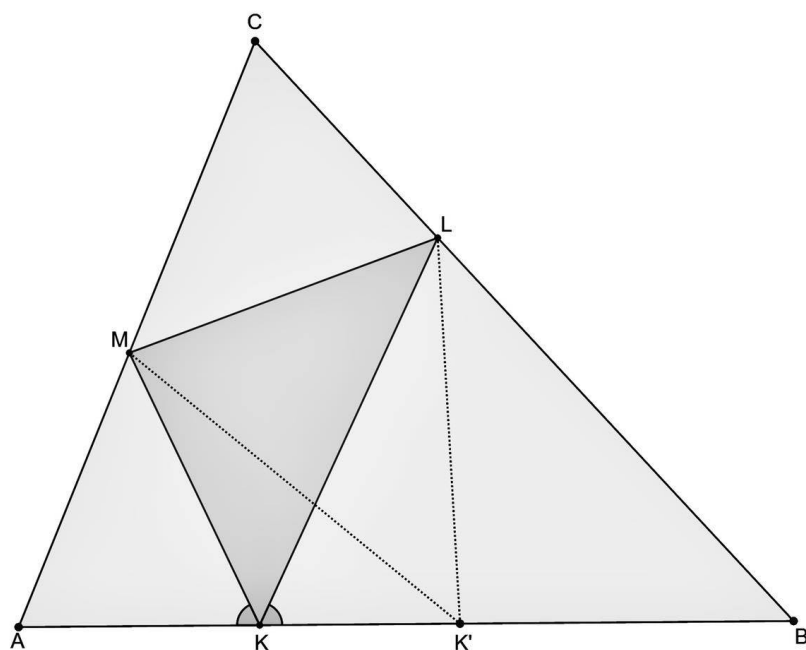


Obrázek 10: Důkaz věty 13

podle  $A_1B_1$  se otočila kolem bodu  $B_1$  o dvojnásobný úhel  $\beta$  (opět ve směru ručiček). V souměrnosti podle  $B_2C_2$  byla samodružná. Poté se otočila okolo bodu  $C_2$  o dvojnásobek úhlu  $\gamma$  (proti směru hodinových ručiček) a nakonec se otočila kolem bodu  $B_4$  o dvojnásobek úhlu  $\beta$  (opět proti směru). Úsečka  $B_5C_5$ , která je obrazem úsečky  $BC$ , se tedy neotočila a obraz je rovnoběžný se vzorem. Nejkratší úsečka mezi  $Y$  a  $Y_5$  by tak byla rovnoběžná s úsečkou  $LL_5$ . Dvojnásobek obvodu trojúhelníku  $XYZ$  je však tvořen lomenou čarou (na obrázku 10 znázorněna přerušovanou čarou), a tedy je (například podle trojúhelníkové nerovnosti) delší než úsečka  $YY_5$ , jejíž délka je rovna délce  $LL_5$ .

Výškový trojúhelník je proto vepsaným trojúhelníkem s minimální délkou obvodu. □

(Courant, Robbins, 1996)



Obrázek 11: Vztah mezi řešeními *Schwarzova* a *Heronova problému*

Důkaz věty 13 lze také provést za využití řešení *Heronovy úlohy*:

*Důkaz.* Předpokládejme, že trojúhelník  $KLM$  vepsaný trojúhelníku  $ABC$  (viz obrázek 11) je řešením *Schwarzova problému*.

Pak platí, že součet vzdáleností  $|MK| + |KL|$  je minimální, neboť pokud by minimální součet byl pro jiné  $K' \in AB$ ,  $K \neq K'$ , pak by trojúhelníkem, který řeší *Schwarzův problém*, byl trojúhelník  $K'LM$ , a to je spor s předpokladem. Bod  $K$  je tedy řešením *Heronova problému* pro body  $M$  a  $L$ , kdy hraniční přímkou tvoří přímka  $AB$ . Tímto postupem lze ukázat, že také bod  $L$  je řešením *Heronova problému*, kdy hraniční přímkou je  $CB$  a dvojice příslušných bodů je  $M, K$ . Stejný argument použijeme i pro bod  $M$  vzhledem k hraniční přímce  $CA$  a dvojici bodů  $K, L$ .

Protože vrcholy vepsaného trojúhelníku jsou řešeními *Heronova problému*, platí podle věty 7 následující rovnosti mezi úhly:

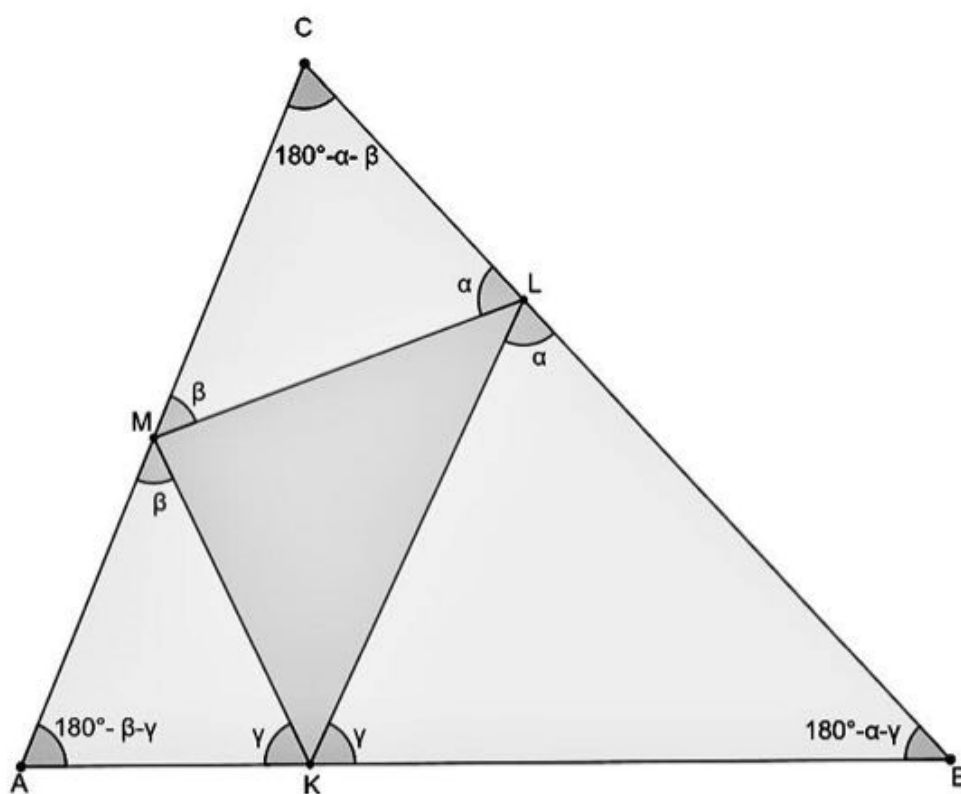
$$|\sphericalangle AKM| = |\sphericalangle BKL| \text{ (naznačeno na obrázku 11 na straně 34),}$$

$$|\sphericalangle BLK| = |\sphericalangle CLM|,$$

$$|\sphericalangle CML| = |\sphericalangle AMK|.$$

Jestliže existuje trojúhelník, který úlohu řeší, musí splňovat tyto rovnosti. Rovnosti mezi úhly jsou znázorněny na obrázku 12.

Pro úhly u vrcholů trojúhelníku  $ABC$  platí, že jsou doplňkem příslušné dvojice úhlů  $\alpha, \beta$  a  $\gamma$  do  $180^\circ$ , jak je také ukázáno na obrázku 12. Dále platí, že součet



Obrázek 12: Vztah mezi úhly v alternativním důkazu věty 13

úhlů u vrcholů  $A, B$  a  $C$  je roven  $180^\circ$ . Pro úhel  $\omega$  u vrcholu  $C$  tak platí následující soustava rovnic:

$$\omega = 180^\circ - \alpha - \beta,$$

$$\omega = 180^\circ - (180^\circ - \beta - \gamma + 180^\circ - \alpha - \gamma).$$

Řešením soustavy je rovnost  $\omega = \gamma$ . Stejným postupem bychom ukázali, že úhel u vrcholu  $A$  je roven  $\alpha$  a úhel u vrcholu  $B$  úhlu  $\beta$ .

Již víme, že tuto vlastnost splňuje výškový trojúhelník a jakýkoliv další, který by byl řešením *Schwarzova problému*, by tak musel mít strany rovnoběžné se stranami výškového trojúhelníku. Takový trojúhelník ovšem není možné sestrojit.

Zbývá ukázat, zda v případě, kdy jeden z bodů  $K, L, M$  je vrcholem trojúhelníku  $ABC$ , není minimem degenerovaný trojúhelník (v úsečku), jehož obvod je roven velikosti dvou výšek.

Sestrojíme polopřímky  $ML$  a  $MK$  a spustíme na ně z bodu  $B$  kolmice. Paty kolmic označíme popořadě  $X, Y$ . Také sestrojíme kolmici z bodu  $B$  k úsečce  $KL$  a patu označíme  $Z$  (viz obrázek 13 na straně 37). Protože  $MBX$  a  $MBY$  jsou pravoúhlé trojúhelníky, platí:

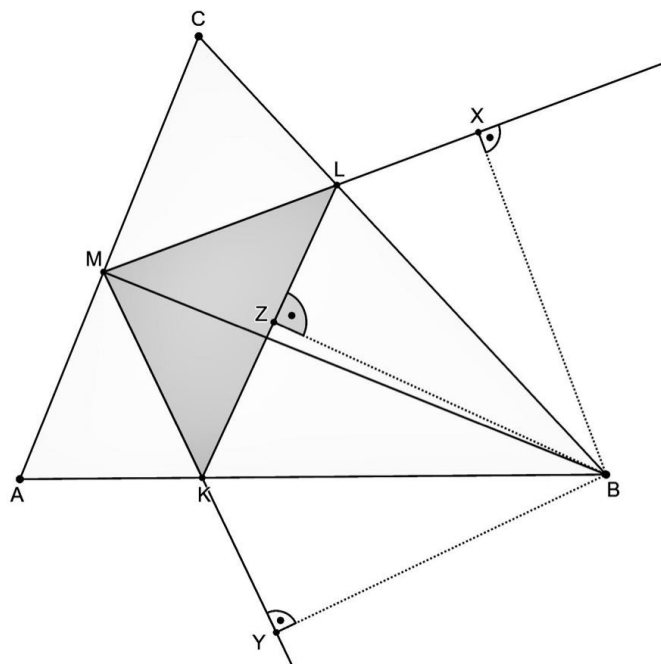
$$2|MB| > |MX| + |MY|.$$

Trojúhelníky  $KYB$  a  $KZB$  jsou oba pravoúhlé a shodují se také v úhlu u vrcholu  $K$  podle lemmatu 2. Potom se musí shodovat i ve třetím úhlu. Navíc mají trojúhelníky společnou stranu. Proto jsou (*SUS*) trojúhelníky shodné a  $KY = KZ$ . Obdobně můžeme ukázat, že  $LZ = LX$ . Pro obvod  $p$  trojúhelníku  $KLM$  platí:

$$2|MB| > |MX| + |MY| = |ML| + |LZ| + |MK| + |KZ| = p.$$

To lze ukázat pro libovolnou výšku a degenerovaný trojúhelník tak není minimálním a minimálním je právě výškový trojúhelník.  $\square$

(Courant, Robbins, 1996)



Obrázek 13: Alternativní důkaz věty 13

#### 4.2.3 Steinerův problém

Problém popsany německým matematikem Steinerem na začátku devatenáctého století se zabývá otázkou, jakým způsobem zkonstruovat nejkratší cestu mezi třemi městy  $A, B, C$ . Hledáme tedy takový bod  $P$ , pro který platí, že výraz  $|AP| + |BP| + |CP|$  je minimální. (Courant, Robbins, 1996)

K tomu, abychom řešení *Steinerova problému* našli, použijeme takový postup, ke kterému nejprve potřebujeme ukázat, jak najít nejkratší vzdálenost ke křivce.

**Věta 14.** *Nechť je dána křivka, pro kterou platí, že má v každém svém bodě tečnu. Dále nechť je dán bod  $P$ . Na křivce leží bod  $R$  takový, že vzdálenost  $PR$  je minimální. Pro úsečku  $PR$  pak platí, že je kolmá k tečně křivky v bodě  $R$ .*

*Důkaz.* Sestrojíme kružnici  $k(P; |PR|)$ . Kružnice  $k$  křivku nemůže protnout, jinak by část křivky ležící uvnitř kružnice měla od středu  $P$  menší vzdálenost, než k bodu

$R$  – to by byl spor s předpokladem minimální vzdálenosti mezi body  $P$  a  $R$ . V bodu  $R$  se kružnice křivky pouze dotýká, tedy kružnice i křivka mají v těchto bodech společnou tečnu, která je kolmá k poloměru kružnice a tím i k tečně křivky.  $\square$

(Courant, Robbins, 1996)

Dále zobecníme větu 7 související s úhly v řešení *Heronova problému*, kde místo přímky budeme uvažovat jednoduchou uzavřenou křivku, která má tečnu v každém svém bodě:

**Věta 15.** *Nechť je dána uzavřená křivka  $C$  a dvojice různých bodů  $P, Q$  ve vnější oblasti křivky  $C$ . Dále nechť je dán bod  $R \in C$  takový, že  $|PR| + |QR|$  je minimální. Úsečky  $PR$  a  $QR$  pak svírají s tečnou křivky  $C$  v bodě  $R$  stejný úhel.*

*Důkaz.* Nechť bod  $R \in C$  je takovým bodem, že platí  $|PR| + |QR|$  je minimální. Zavedeme označení  $|PR| + |QR| = 2a$ . Elipsa s ohnisky v bodech  $P$  a  $Q$  a součtem délek průvodičů  $2a$  je množinou bodů, které od ohnisek mají vzdálenost  $|PR| + |QR|$ .

Pokud by tato elipsa protla křivku  $C$ , existovala by část křivky náležící vnitřnímu prostoru elipsy. Pro body v této části křivky by však součet vzdáleností k ohniskům byl menší než  $2a$ , a to nemůže nastat, jelikož předpokládáme, že  $2a$  je minimální vzdálenost. Proto elipsa musí mít společnou tečnu s křivkou  $C$  v bodě dotyku  $R$ .

Víme (viz poznámka 6), že úhly mezi tečnou a každým z průvodičů elipsy jsou shodné. Proto také platí, že úsečky  $PR$  a  $QR$  svírají shodný úhel s tečnou křivky  $C$  v bodě  $R$ .  $\square$

*Steinerovu větu lze vyslovit takto:*

**Věta 16.** *Nechť je dána trojice nekolineárních bodů  $A, B, C$ . Pokud trojúhelník  $ABC$  má některý z úhlů větší nebo roven úhlu  $120^\circ$ , pak bod  $P$ , pro který má*

platit, že  $|PA| + |PB| + |PC|$  je minimální, splyne s vrcholem trojúhelníku, jemuž přísluší největší úhel. Pokud žádný z úhlů není větší nebo roven  $120^\circ$ , pak jsou z bodu  $P$  všechny strany trojúhelníku  $ABC$  vidět pod úhlem  $120^\circ$ .

*Důkaz.* Předpokládejme, že  $P$  je hledaným bodem. Bod  $P$  může zaujímat dvě polohy:

1. Bod  $P$  náleží některému z vrcholů trojúhelníku  $ABC$ .
2. Bod  $P$  nenáleží žádnému z vrcholů trojúhelníku  $ABC$ .

Polohy se pokusíme blíže definovat.

Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že je vrchol  $C$  vrcholem, k němuž přilehlý vrcholový úhel je největší. Proti největšímu úhlu leží nejdelší strana  $c$ . Nejkratší cesty do sousedních vrcholů jsou po úsečkách  $a$  a  $b$ . Každá varianta cesty zahrnující úsečku  $c$  bude delší, než cesta po úsečkách  $a$  a  $b$ . Proto vrchol  $C$  bude naším hledaným bodem  $P$ .

Ve druhém případě postupujeme za opakovaného využití věty 15. Z předpokladu, že  $P$  je řešením *Steinerova problému*, víme, že platí  $|AP| + |BP| + |CP|$  je minimální. Ve vrcholu  $C$  sestrojíme kružnici o poloměru  $|PC|$ . Bod  $P$  náleží této kružnici a je takovým bodem, pro který platí, že  $|AP| + |PB|$  je minimální.

Předpokládejme, že nějaký z bodů  $A, B$  (například  $A$ ) leží na nebo uvnitř kružnice. Protože jsme nyní předpokládali, že bod  $P$  je různý od vrcholů trojúhelníku  $ABC$ , tvoří body  $A, B, P$  trojúhelník, nebo jsou kolineární. Platí pro ně proto trojúhelníková nerovnost:

$$|AP| + |BP| \geq |AB|.$$

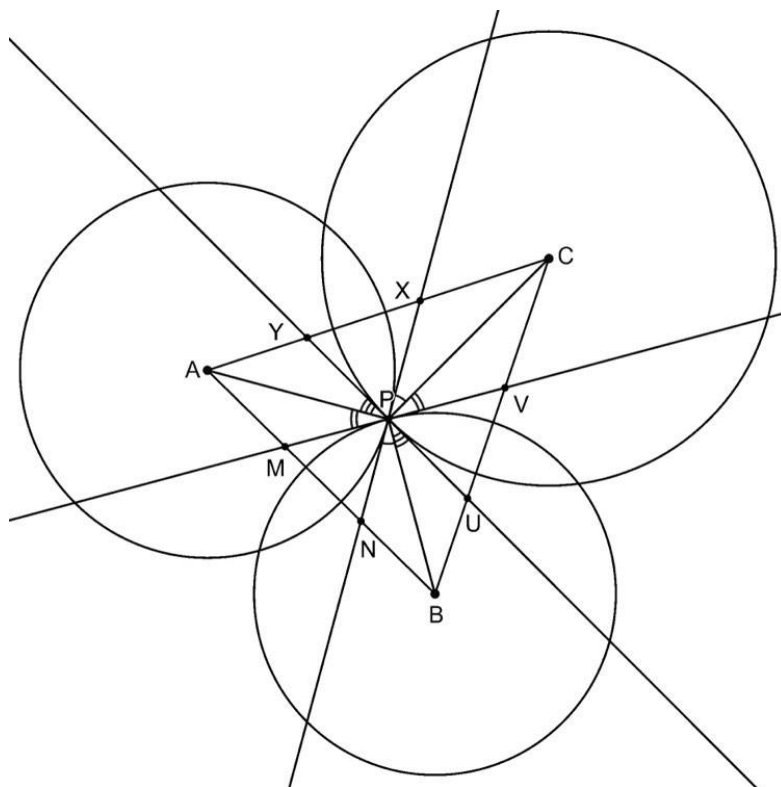
Protože bod  $C$  leží na, nebo uvnitř kružnice, platí  $|AC| \leq |PC|$ . Z obou nerovností dostáváme:

$$|AP| + |BP| + |CP| \geq |AB| + |AC|.$$

Hodnota na levé straně bude minimální, když se bude rovnat pravé straně. Tedy když bod  $P$  bude ležet ve vrcholu  $A$ , což jsme ovšem v předpokladu vyloučili. Došli jsme tak ke sporu.

Platí tedy, že oba body  $A, B$  leží vně kružnice. Stejně bychom postupovali pro zbylé dvojice bodů.

Protože jsou body  $A$  a  $B$  vně kružnice, pak podle věty 15 platí, že  $PA$  a  $PB$  svírají s tečnou kružnice v bodě  $P$ , a tedy i s poloměrem kružnice  $PC$ , shodné úhly. Takto najdeme ještě další dvojice shodných úhlů, kdy konstruujeme kružnice se středy v bodech  $A$  a  $B$  s odpovídajícími poloměry, jak je ukázáno na obrázku 14.



Obrázek 14: Dvojice shodných úhlů podle věty 15



Úhly  $YPA$  a  $BPU$  tak mají stejnou velikost. Stejně tak dvojice úhlů  $APM$  a  $VPC$  a dvojice  $NPB$  a  $CPX$ . Dourčíme vrcholové úhly a označíme tak, jak je vidět na obrázku 15 na straně 42. V obrázku také platí, že průměr  $BP$  je kolmý k tečně  $MV$ , průměr  $AP$  je kolmý k tečně  $XN$  a průměr  $CP$  je kolmý k tečně  $YU$ . Z toho dostáváme následující soustavu rovnic pro velikosti úhlů  $\alpha, \beta$  a  $\gamma$ :

$$\alpha + 2\gamma = 90^\circ,$$

$$\alpha + 2\beta = 90^\circ,$$

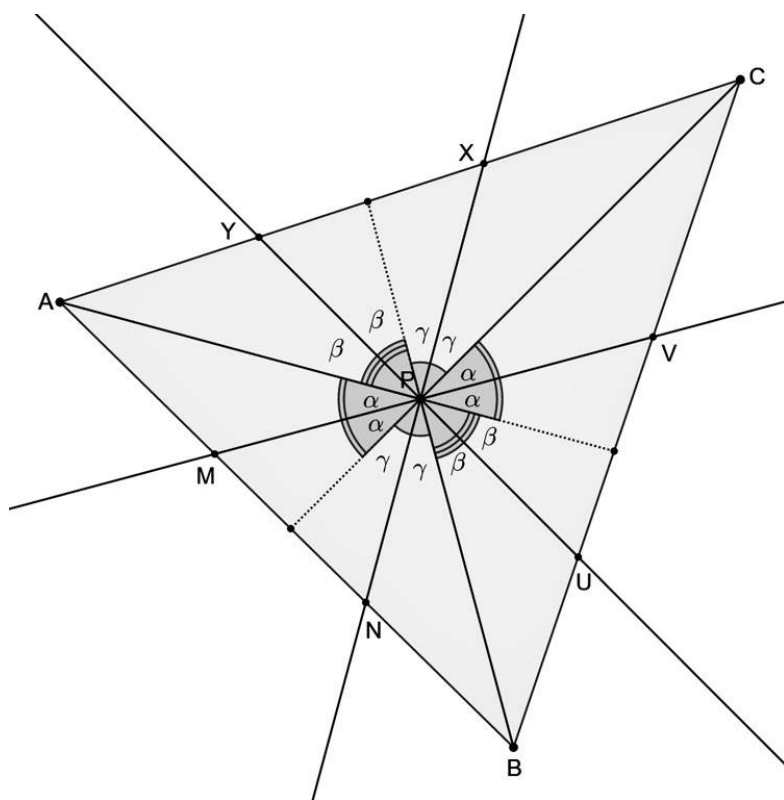
$$\beta + 2\gamma = 90^\circ.$$

Ze soustavy dostáváme, že platí  $\alpha = \beta = \gamma = 30^\circ$ . Strana  $AB$  trojúhelníku  $ABC$  je vidět z bodu  $P$  pod úhlem o velikosti  $2\alpha + 2\gamma = 120^\circ$ , strana  $BC$  pod úhlem  $2\alpha + 2\beta = 120^\circ$  a zbývající strana  $AC$  tak je vidět také pod úhlem  $120^\circ$  (viz obrázek 15 na straně 42).

To, kdy nastane první a kdy druhý případ, lze ukázat konstrukcí bodu  $P$ . Ten lze najít například tak, že sestrojíme nad stranami  $AB$  a  $BC$  trojúhelníku  $ABC$  množiny bodů, z nichž je příslušná strana vidět pod úhlem  $120^\circ$ . Nejprve sestrojíme úsečku  $AD$  tak, že úhel  $BAD$  má velikost  $120^\circ$ . Z bodu  $A$  spustíme kolmici k  $AD$  a na úsečce  $AB$  najdeme střed  $S_{AB}$ . Z bodu  $S_{AB}$  spustíme kolmici k úsečce  $AB$ . Průnik obou kolmic označíme  $S$ . Sestrojíme kružnici se středem v bodě  $S$  a o poloměru  $AS$ . Kruhový oblouk ležící v trojúhelníku  $ABC$  je podle věty o obvodovém a středovém úhlu hledanou množinou bodů (viz obrázek 16 na straně 43). Obdobně postupujeme pro stranu  $BC$ .

Průnik těchto množin je bod, ze kterého je vidět strana  $AB$  i  $BC$  pod úhlem  $120^\circ$ . Proto je i třetí strana vidět pod úhlem  $120^\circ$  (dopočet do  $360^\circ$ ). Průnik je tedy hledaným bodem  $P$  (viz obrázek 17 na straně 43).

Pokud ovšem jeden z úhlů v trojúhelníku  $ABC$  je větší nebo roven  $120^\circ$ , kruhové oblouky se uvnitř trojúhelníku neprotínou (viz obrázek 18 na straně 43).

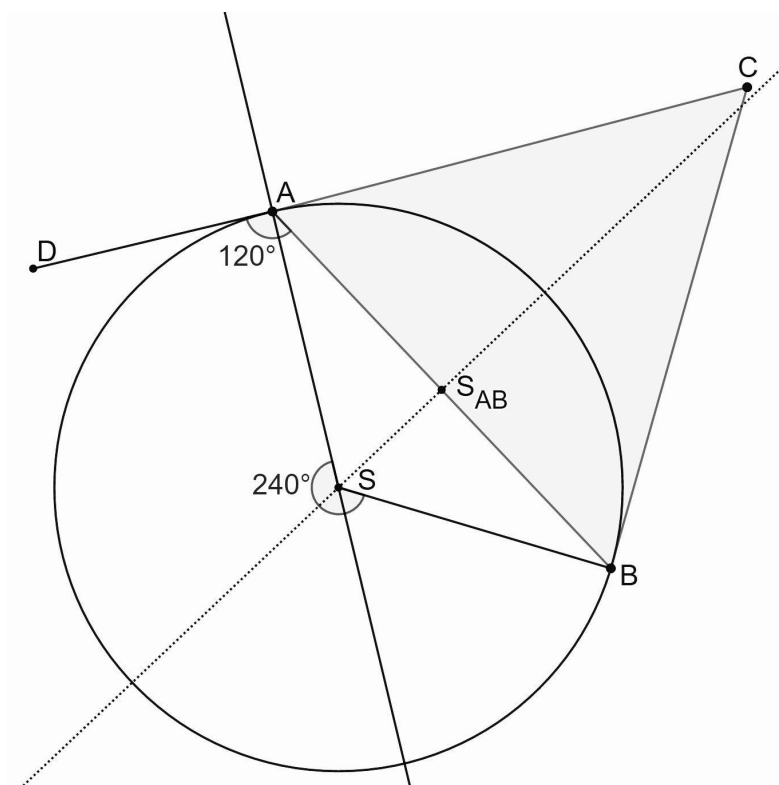


Obrázek 15: Detailnější pohled na shodné úhly

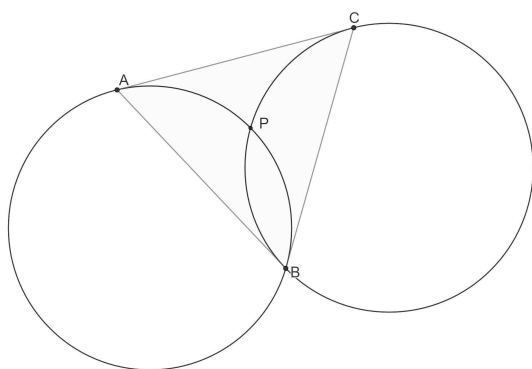
Protnou se mimo trojúhelník v bodě, z něž jsou dvě strany vidět pod úhlem  $60^\circ$  a třetí pod úhlem  $120^\circ$ .

Platí tedy, že pro trojúhelník s úhlem větším nebo rovném  $120^\circ$  neexistuje bod takový, že by z něj byly všechny tři strany vidět pod úhlem  $120^\circ$ . Tedy musí nastat ta možnost, kdy bod  $P$  je totožný s vrcholem trojúhelníku, kterému náleží úhel větší nebo roven  $120^\circ$ .

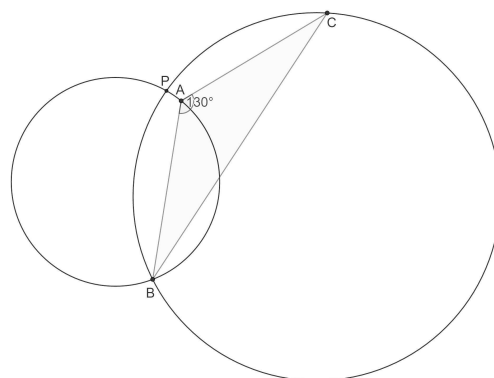
Je také potřeba dokázat, že v případě, kdy bod  $P$  neleží v žádném z vrcholů, je součet vzdáleností  $|AP| + |BP| + |CP|$  menší, než kdyby  $P$  náležel některému z vrcholů. Víme zatím jen, že  $P$ , z něž jsou strany vidět pod úhlem  $120^\circ$ , nabývá minima, pokud ho nenabývá v některém z vrcholů trojúhelníku.



Obrázek 16: Konstrukce množiny bodů, ze které je strana  $AB$  vidět pod úhlem  $120^\circ$



Obrázek 17: Všechny úhly jsou menší než  $120^\circ$



Obrázek 18: Existuje úhel větší než  $120^\circ$

Ptáme se, jestli platí, že  $|AP| + |BP| + |CP|$  je menší, než součet libovolných dvou stran trojúhelníku  $ABC$ .

Sestrojíme polopřímku  $BP$  a na ni kolmo promítneme bod  $A$ . Patu kolmice označíme  $D$ . Úhel  $APD$  má velikost  $60^\circ$ , jak jsme zjistili řešením soustavy rovnic (viz obrázek 19 na straně 45). Proto platí, že:

$$\cos 60^\circ \cdot |AP| = |PD|,$$

tedy  $|PD| = \frac{1}{2}|AP|$ . Protože  $AB$  je přepona pravoúhlého trojúhelníku  $ABD$ , platí  $|BD| < |AB|$ . Dále platí, že  $|BD| = |BP| + |DP| = |BP| + \frac{1}{2}|AP|$ . Proto platí:

$$|BP| + \frac{1}{2}|AP| < |AB|.$$

Sestrojením polopřímky  $CP$  a kolmým průmětem bodu  $A$  obdobně dostáváme:

$$|CP| + \frac{1}{2}|AP| < |AC|.$$

Z obou nerovností dostáváme:

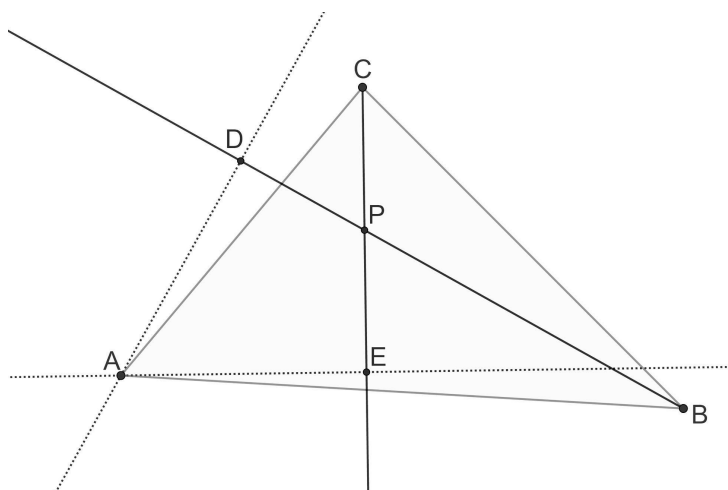
$$|BP| + \frac{1}{2}|AP| + |CP| + \frac{1}{2}|AP| = |AP| + |BP| + |CP| < |AB| + |AC|.$$

Stejně bychom důkaz mohli provést pro další dvojice stran. Již víme, že pokud hledaným bodem  $P$  není jeden z vrcholů, pak musí  $P$  být bodem, z něž jsou strany vidět pod  $120^\circ$ . Právě jsme ovšem také ukázali, že v takovém případě je  $P$  bodem, pro který platí, že součet vzdáleností mezi ním a vrcholy trojúhelníku je minimální.

(Courant, Robbins, 1996)

□

Řešení *Steinerova problému* pro případ, kdy vnitřní úhly trojúhelníku nejsou větší nebo rovny  $120^\circ$ , je známo jako tzv. *Toricelliho bod*.



Obrázek 19: Dokončení důkazu věty 16

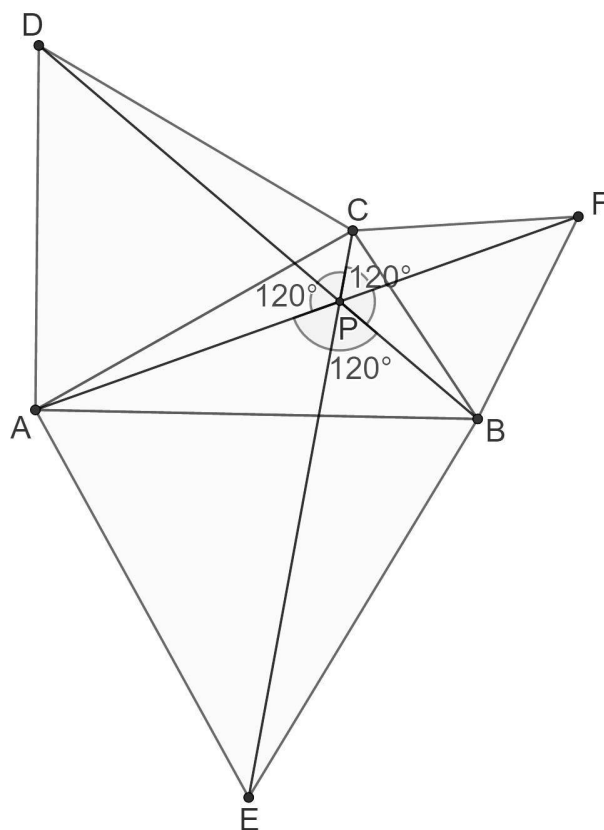
**Definice 11. Toricelliho (též Fermatův) bod** je takový bod, ze kterého je každá strana trojúhelníku vidět pod úhlem  $120^\circ$ .

(Boček, Zhouf, 2012)

*Toricelliho bod* lze nalézt například tak, že nad každou stranou trojúhelníku sestrojíme rovnostranný trojúhelník a spojíme odpovídající vrcholy, jak je vidět na obrázku 20 na straně 46. Průnik těchto spojnic je *Toricelliho bodem*. Proč tomu tak je, lze ukázat pomocí (viz poznámka 13 na straně 47) následujícího alternativního důkazu *Steinerovy věty* pro trojúhelník, jehož všechny vnitřní úhly jsou menší než  $120^\circ$ .

*Důkaz.* Nechť je dán trojúhelník  $ABC$ , jehož vnitřní úhly jsou menší než  $120^\circ$ . Ve vnitřní části trojúhelníku zvolíme bod  $P'$  a sestrojíme úsečky  $AP'$ ,  $BP'$  a  $CP'$  (viz obrázek 21 na straně 47).

Trojúhelník  $AP'C$  otočíme kolem vrcholu  $A$  o  $60^\circ$ . Protože rotace zachovává délky, platí, že  $|AP'| = |AP''|$ . Tedy trojúhelník  $AP'P''$  je rovnoramenný. Protože úhel u vrcholu  $A$  je  $60^\circ$ , je trojúhelník  $AP'P''$  dokonce rovnostranný. Proto platí,

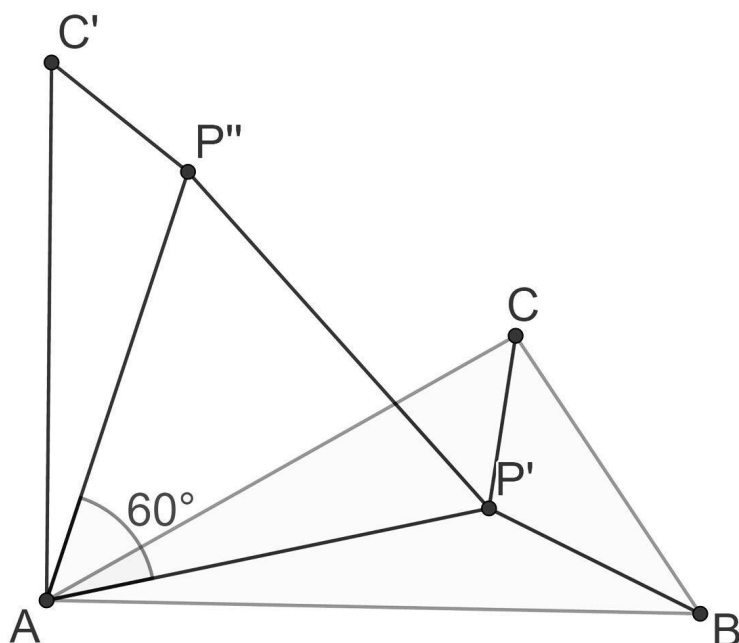


Obrázek 20: Další možnost konstrukce *Toricelliho bodu*

že  $|P'P''| = |AP'|$ . Také se zachovala vzdálenost mezi vzory a obrazy bodů  $C$  a  $P'$ , tedy platí  $|CP'| = |C'P''|$ . Délka lomené čáry složené z úseček  $C'P''$ ,  $P''P'$  a  $P'B$  je tedy stejná jako součet délek úseček  $CP'$ ,  $AP'$  a  $BP'$ . Tuto vzdálenost chceme minimalizovat a minimum nastane právě tehdy, když lomená čára bude přímkou, tedy když body  $P'$  a  $P''$  budou ležet na přímce  $BC'$ .

V případě, že body leží na přímce, je úhel  $BP'P''$  přímý. Protože úhel  $AP'P''$  má velikost  $60^\circ$ , má úhel  $AP'B$ , tedy úhel, pod kterým je z bodu  $P'$  vidět strana  $AB$ , velikost  $120^\circ$  (viz obrázek 22 na straně 48).

Stejnou konstrukci bychom mohli provést i u ostatních vrcholů, jak je vidno na obrázku 23 na straně 49. Z bodu  $P'$ , který jsme zkonstruovali, tedy vidíme každou



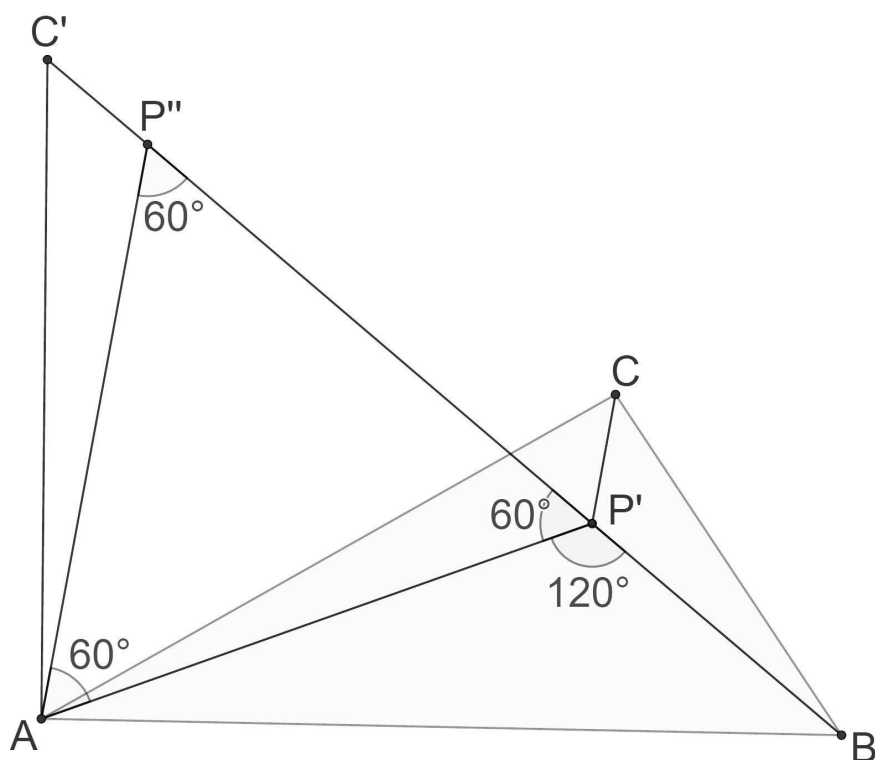
Obrázek 21: Ilustrace k hledání *Toricelliho bodu*

ze stran trojúhelníku pod úhlem  $120^\circ$ , a navíc platí, že součet délek úseček mezi tímto bodem a vrcholy trojúhelníku je minimální, jedná se tedy o bod  $P$ , který jsme hledali.

□

(Nahin, 2007; Think Twice, 2020)

**Pozn. 13.** V důkazu si můžeme všimnout (např. v obrázku 23 na straně 49), že trojúhelník  $ACC'$  je rovnostranný, neboť  $|AC| = |AC'|$  a úhel  $CAC'$  má velikost  $60^\circ$ . Stejně tak trojúhelník  $CBB'$  a  $BAA'$ . Proto platí, že *Toricelliho bod* lze nalézt tak, že nad stranami trojúhelníku vztyčíme rovnostranné trojúhelníky a příslušné vrcholy spojíme. Na jejich spojnici pak leží *Toricelliho bod* (viz obrázek 20 na straně 46).

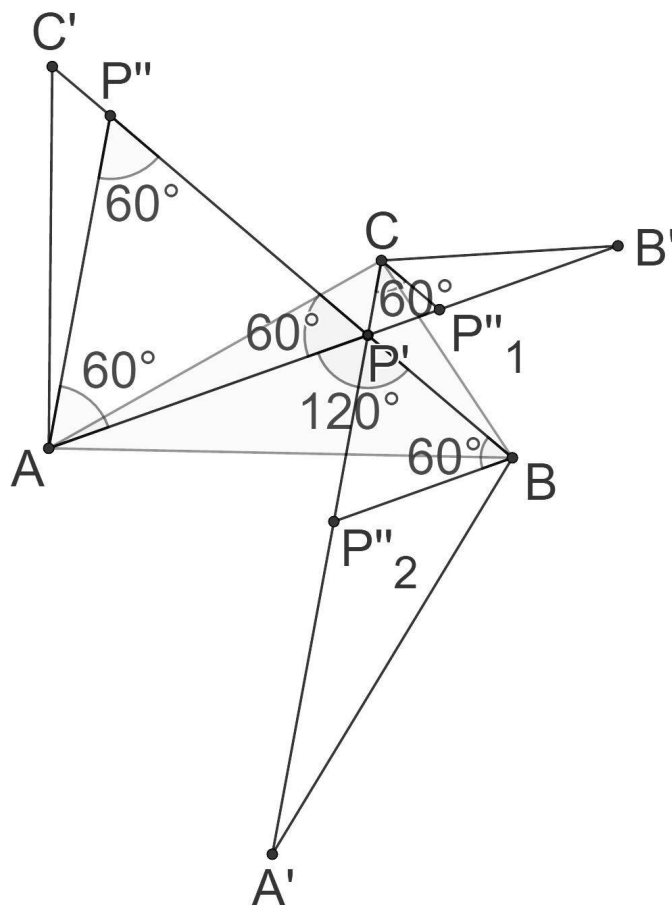


Obrázek 22: Body leží v přímce

**Pozn. 14.** Provedeme-li konstrukci popsanou v poznámce 13 pro trojúhelník, který má některý vnitřní úhel větší nebo roven  $120^\circ$ , průsečík, tedy bod  $P$ , nebude ležet ve vnitřní části trojúhelníku. To je ukázáno na obrázku 24 na straně 50, kde je úhel  $APB$  větší než  $120^\circ$ . V takovém případě je ale kratší cesta z vrcholu  $C$  než z bodu  $P$ .

*Steinerův problém* má mnoho praktických využití. Nahin (2007) to ilustruje na příkladu ze šedesátých let minulého století, kdy telekomunikační společnost *Bell Telephone Company* měla za úkol vybudovat spojení mezi třemi letišti společnosti *Delta Airlines* v Atlantě, New Yorku a Chicagu. Tato tři města formují ostroúhlý trojúhelník, který označíme  $ABC$ . Telefonní společnost si neúčtovala platby podle provolaných minut, ale podle minimální délky drátu potřebného k vytvoření

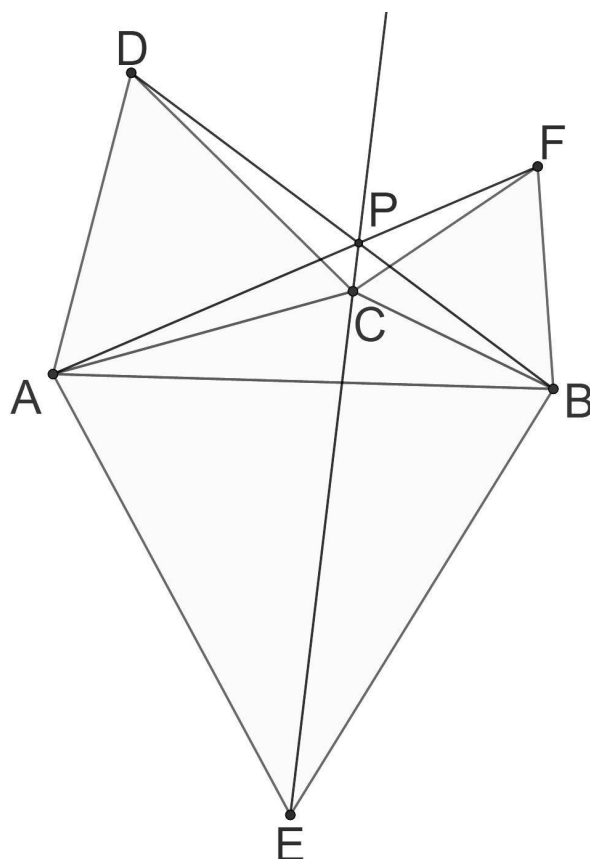




Obrázek 23: Poloha bodu  $P$

telefonní sítě (i v případě, kdy síť byla postavena delším způsobem). Tuto cenu *Bell Telephone Company* stanovila na cenu odpovídající vzdálenosti  $|AB| + |BC|$ . Letecká společnost si však výsledky ověřila a kontrovala tím, že se nejedná o minimum, a navrhla řešení *Steinerova problému*. Telefonní společnost námitku akceptovala, čímž *Delta Airlines* ušetřila v tomto konkrétním případě až patnáct procent částky.

Přestože existuje možnost, že telefonní společnost chtěla pouze vydělat, a proto tuto možnost volila, je také dobře možné, že jim toto řešení skutečně uniklo



Obrázek 24: Bod  $P$  leží mimo obsah trojúhelníku  $ABC$

a intuice projektanty zradila, když předpokládali, že když nejkratší vzdálenost mezi dvěma body je úsečka, mezi třemi to bude součet těchto úseček.

Nahin (2007), Courant a Robbins (1996) i Tikhomirov (1986) zmiňují zobecnění *Steinerova problému* na více bodů. Prvním možným zobecněním je rozšířit problém na čtyři body  $A, B, C, D$ , kdy hledáme takový bod  $P$ , ze kterého je součet vzdáleností do bodů  $A, B, C, D$  minimální. Tímto problémem se zabýval Steiner také a ukázal, že pro konvexní čtyřúhelník je řešením průnik jeho úhlopříček:

**Věta 17.** *Nechť je dán konvexní čtyřúhelník  $ABCD$ . Bod  $P$ , pro který platí, že  $|AP| + |BP| + |CP| + |DP|$  je minimální, leží na průsečíku úhlopříček čtyřúhelníku  $ABCD$ .*

*Důkaz.* Zvolíme bod  $P'$  libovolně ve vnitřní části čtyřúhelníku. Z trojúhelníkové nerovnosti víme, že platí:

$$|AP'| + |PC| \geq |AC|,$$

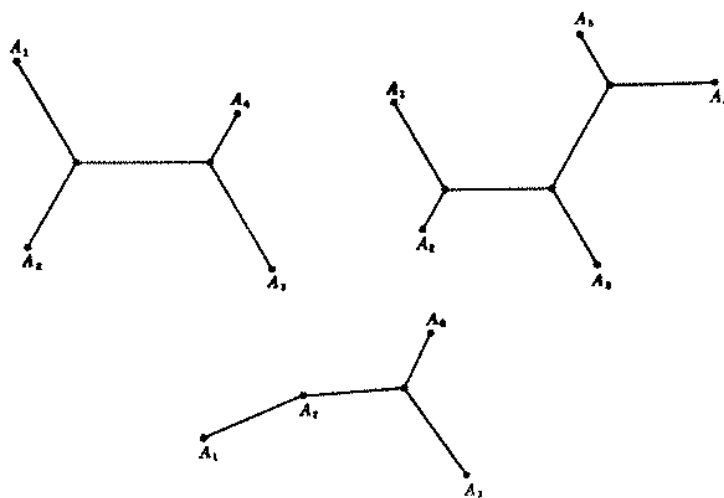
$$|BP'| + |PD| \geq |BD|.$$

Z nerovností pak dostáváme:

$$|AP'| + |PC| + |BP'| + |PD| \geq |AC| + |BD|.$$

Součet na levé straně nabývá minimální hodnoty rovné součtu délek úhlopříček. To nastane právě v případě, když  $P'$  leží na průniku úhlopříček.  $\square$

Jinou možností zobecnění je připustit více, než jedno  $P$ , tedy více „křižovatek“. Takový problém je už však mnohem složitější. Tímto zobecněním se zabýval například Jarník v teorii grafů. Také je možné jej modelovat pomocí mýdlových blan. (Soothill, 2010; Courant, Robbins, 1996)



Obrázek 25: Nejkratší síť pro více, než tři body (Courant, Robbins, s. 360, 1996)

V obrázku 25 je možné si všimnout, že cesty vycházející z křižovatky, v níž se sbíhají tři cesty stále svírají úhel  $120^\circ$ .

### 4.3 Isoperimetrické úlohy

Úlohu vyžadující nalezení útvaru s **největším** obsahem/objemem při daném obvodu/povrchu nazýváme *isoperimetrickou úlohou*. Ekvivalentní úlohou je hledání útvaru s **nejmenším** obvodem/povrchem, je-li dán konstantní obsah/objem.

#### 4.3.1 Zenodorův problém

V kapitole 4.2 je ukázáno, že trojúhelníkem s největším obsahem při dané délce obvodu je rovnostranný trojúhelník a pravoúhelník s největším obsahem čtverec. Je tedy přirozené se nyní ptát, jak to bude s obecným čtyřúhelníkem:

**Věta 18.** *Čtyřúhelníkem s největším obsahem při dané délce obvodu je čtverec.*

*Důkaz.* Důkaz provedeme ve dvou krocích:

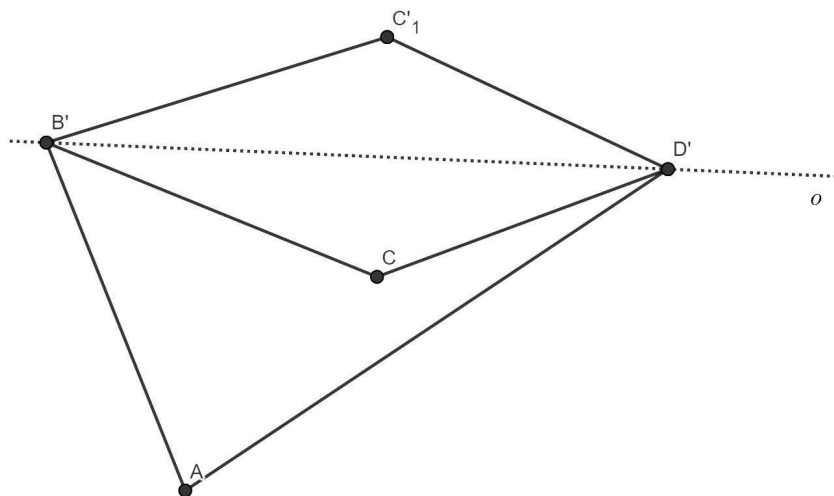
1. Ukážeme, že čtyřúhelník s maximálním obsahem musí být konvexní. Pro ilustraci slouží obrázek 26 na straně 53.

Je-li čtyřúhelník nekonvexní, pak snadno sestrojíme konvexní se stejným obvodem, ale větším obsahem. Na obrázku vedeme vrcholy  $B, D$  přímkou  $o$ , podle které osově souměrně zobrazíme úsečky  $BC$  a  $CD$ . Protože se jedná o shodné zobrazení, délky úseček, a tedy i obvod čtyřúhelníku, zůstanou nezměněny, ale obsah je větší.

2. Nechť je dán konvexní čtyřúhelník  $ABCD$  o délce stran  $a, b, c, d$  a obsahu  $S$ .

Čtverec se stejným obvodem, jaký má tento čtyřúhelník, má délku strany rovnou výrazu  $\frac{a+b+c+d}{4}$ , a jeho obsah proto je  $(\frac{a+b+c+d}{4})^2$ . Chceme tedy dokázat platnost následujícího vztahu:

$$S \leq \left( \frac{a + b + c + d}{4} \right)^2,$$



Obrázek 26: Isoperimetrické zkonvexnění nekonvexního čtyřúhelníku

kdy rovnost mezi levou a pravou stranou má nastávat právě tehdy, když čtyřúhelník  $ABCD$  je čtverec.

Označíme úhel u vrcholu  $A$  jako  $\alpha$ . Obsah trojúhelníku  $ABD$  dostaneme ze vztahu  $\frac{1}{2}ad \sin \alpha$ . Obdobně označíme vrchol u vrcholu  $C$  písmenem  $\gamma$  a obsah trojúhelníku vyjádříme pomocí úhlu jako  $\frac{1}{2}bc \sin \gamma$ . Obsah každého z trojúhelníků nabývá maximální hodnoty pro úhel rovný pravému. Obsah čtyřúhelníku  $ABCD$  je tedy vždy následující:

$$S \leq \frac{1}{2}ad + \frac{1}{2}bc.$$

Podobný závěr dostaneme pro úhly  $\beta$  a  $\delta$  u vrcholů  $B$  a  $D$ :

$$S \leq \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}cd.$$

Obě nerovnosti upravíme a sečteme:

$$2S \leq ab + cd,$$

$$2S \leq ad + bc,$$


---

$$4S \leq ab + ad + cd + bc = (a + c)(b + d).$$

Z věty 4 dále víme, že:

$$\sqrt{(a + c)(b + d)} \leq \frac{(a + b) + (c + d)}{2},$$

a také, že rovnost nastane právě tehdy, když se  $a + b = c + d$ . Můžeme tedy psát:

$$4S \leq (a + c)(b + d) \leq \left( \frac{a + b + c + d}{2} \right)^2.$$

Rovnost mezi výrazy  $4S$  a  $(a + c)(b + d)$  nastane tehdy, když všechny úhly jsou pravé, a tedy se jedná o obdélník/čtverec. Rovnost mezi výrazy  $(a + c)(b + d)$  a  $\left( \frac{a + b + c + d}{2} \right)^2$  nastane, když  $a + c = b + d$ . Tyto podmínky splňuje právě čtverec.

□

(Niven, 1981)

**Pozn. 15.** Niven (1981) zmiňuje, že výraz  $\frac{(a+c)(b+d)}{4}$  je odhadem obsahu čtyřúhelníku, který používali staří Egypťané.

Největší obsah při daném obvodu má tedy ze všech trojúhelníků rovnostranný trojúhelník a ze všech čtyřúhelníků čtverec. Ve druhém století před naším letopočtem obdobné tvrzení (větu 19) *problému princezny Dídó* (kapitola 4.3.2), které tyto závěry dále zobecňuje pro libovolný  $n$ -úhelník, dokázal Zenodorus v pojednání *On isometric figures* a podle některých zdrojů (Grötschel, 2012) pochází věta z doby

ještě starší. Věta i s důkazem v Zenodorově podobě se dochovala v rukopisu ze čtrnáctého století (obrázek 27). Jedná se o zobecnění vět 9 a 18. Tvrzení bychom dnešní terminologií mohli zapsat takto:

**Věta 19.** *Existuje-li mnohoúhelník s největším obsahem pro daný obvod, pak je pravidelný.*

**Pozn. 16.** Mnohoúhelník z věty 19 budeme zvat **maximálním mnohoúhelníkem**.

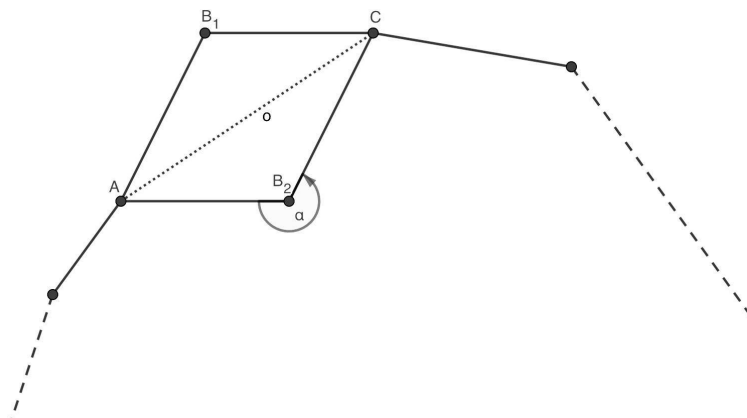


Obrázek 27: Zenodorovo tvrzení v rukopisu ze 14. století (Grötschel, 2012, s. 350)

Před samotným důkazem *Zenodorova tvrzení* jsou nejprve třeba dokázat pomocné věty, lemma 4 a lemma 5, které užijeme k důkazu věty 19. Také je třeba ukázat, že maximální mnohoúhelník nemůže být nekonvexní. To plyne z toho, že ke každému nekonvexnímu mnohoúhelníku jsme schopni nalézt mnohoúhelník konvexní s větším obsahem, jak ukážeme v lemmatu 3. Postup je obdobný jako u čtyřúhelníku v důkazu věty 18. (Tikhomirov, 1986)

**Lemma 3.** *Maximální mnohoúhelník  $A$  je konvexní.*

Pokud by u některého vrcholu mnohoúhelníku byl vnitřní úhel větší než přímý (v obrázku 28 na straně 56 úhel  $\alpha$  u vrcholu  $B_2$ ), snadno bychom získali mnohoúhelník většího obsahu tím, že daný vrchol osově souměrně zobrazíme podle spojnice dvou sousedních vrcholů (v našem případě  $A$  a  $C$ ). Vzhledem k tomu, že



Obrázek 28: Konvexní vs. nekonvexní mnohoúhelník

úsečky  $AB_2$  a  $B_2C$  jsou obrazy úseček ve shodném zobrazení (osová souměrnost), nezmění se obvod nově vzniklého mnohoúhelníku a obsah naroste o obsah kosodélníku  $AB_2CB_1$ . Tak bychom mohli odstranit všechny nekonvexní části mnohoúhelníku a učinit jej konvexním. Pokud tedy existuje maximální mnohoúhelník s daným obvodem, pak je konvexní. Tento závěr, jak říká Tikhomirov (1986), Zenondoros explicitně neuvádí, ale je předpokládán.

**Lemma 4.** *Mnohoúhelník daného obvodu s maximálním obsahem je rovnostranný.*

*Důkaz.* Necht mnohoúhelník  $A_1A_2 \dots A_n$  je maximální. Předpokládejme, že není rovnostranný. (V popisu důkazu se odvoláváme k obrázku 29 na straně 58.)

Protože je mnohoúhelník  $A_1A_2 \dots A_n$  maximální, pak je podle lemmatu 3 konvexní.

Zvolme dvojici různě dlouhých sousedních stran mnohoúhelníku  $A_1A_2 \dots A_n$ . Bez újmy na obecnosti necht to jsou strany  $A_1A_2$  a  $A_2A_3$ . Vrcholem  $A_2$  vedeme rovnoběžku  $p$  s úsečkou  $A_1A_3$ . Na rovnoběžce najdeme bod  $B$  tak, aby součet  $A_1B + BA_3$  byl minimální (viz *Heronův problém*). Z řešení *Heronova problému* za užití shodnosti plyne i shodnost dvojice úhlů, které svírá úsečka  $A_1B$  s přímkou  $p$  (v obrázku úhel  $\gamma$ ) a úsečka  $A_3B$  s přímkou  $p$  (v obrázku úhel  $\delta$ ). Tyto úhly



jsou ovšem také shodné s úhly u vrcholů  $A_1$  a  $A_3$  trojúhelníku  $A_1A_3B$ , neboť se jedná o úhly dvojice střídavých (díky shodnosti dokonce i souhlasných) úhlů. Proto je trojúhelník  $A_1A_3B$  rovnoramenný. Dále platí, že obsah trojúhelníku  $A_1A_3B$  je stejný jako obsah trojúhelníku  $A_1A_3A_2$ , protože základnu mají společnou a výška obou je taktéž stejná, neboť oba vrcholy  $A_2$  i  $B$  leží na rovnoběžce se základnou.

Jelikož jsme bod  $B$  volili tak, aby byla délka  $A_1B + BA_3$  minimální, a také proto, že vrchol  $A_2$  je různý od vrcholu  $B$  (neboť trojúhelník  $A_1A_3A_2$  jsme volili tak, že ramena  $A_1A_2$  a  $A_2A_3$  nejsou stejná), platí nerovnost:

$$A_1B + BA_3 < A_1A_2 + A_2A_3.$$

Nyní sestrojíme rovnoramenný trojúhelník  $A_1A'_2A_3$  takový, že součet délek ramen  $A_1A'_2 + A'_2A_3$  je stejný jako součet délek stran  $A_1A_2 + A_2A_3$ . Protože platí nerovnost  $A_1B + BA_3 < A_1A_2 + A_2A_3$ , pak musí být výška trojúhelníku  $A_1A_3A'_2$  delší, než výška trojúhelníku  $A_1A_3B$ . Proto i jeho obsah je větší.

Proto, že mnohoúhelník  $\dots A_1A'_2A_3 \dots$  má stejný obvod jako původní mnohoúhelník  $\dots A_1A_2A_3 \dots$ , a také proto, že trojúhelník  $A_1A_3A'_2$  má větší obsah než trojúhelník  $A_1A_3B$ , který má stejný obsah jako trojúhelník  $A_1A_3A_2$ , platí, že nově sestrojený mnohoúhelník je isoperimetrickým a zároveň má větší obsah než původní mnohoúhelník.

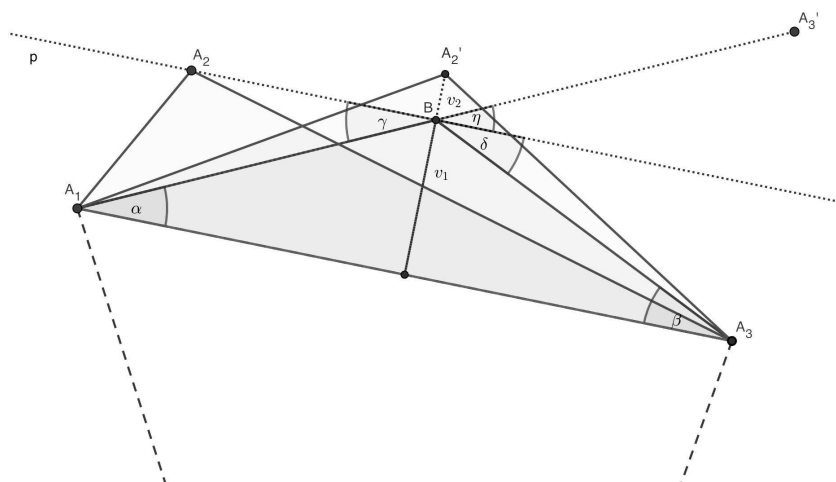
To je spor s předpokladem, že nerovnostranný mnohoúhelník je maximální a maximální mnohoúhelník tak musí být rovnostranný.

□

(Tikhomirov, 1986)

**Lemma 5.** *Mnohoúhelník daného obvodu s maximálním obsahem má shodné vnitřní úhly.*

*Důkaz.* Lemma nejprve dokážeme pro  $n$ -úhelníky, jejichž  $n$  je rovno třem a čtyřem. Poté ukážeme obecnou platnost.



Obrázek 29: Ilustrace konstrukce sporu v lemmatu 4

1. Maximálním trojúhelníkem podle lemmatu 4 je trojúhelník rovnostranný. Takový trojúhelník má velikosti vnitřních úhlů shodné a lemma 5 tak platí pro  $n = 3$ .
2. Maximálním čtyřúhelníkem je podle lemmatu 4 kosočtverec nebo čtverec. Protože obsah kosočtverce spočteme jako délku základny násobenou výškou a délka základny je čtvrtina obvodu, můžeme maximalizovat pouze výšku. Ta nabyde maximálně hodnoty čtvrt obvodu, a to právě tehdy, když se jedná o čtverec. Čtverec má také velikosti vnitřních úhlů shodné a důkaz lemmatu 5 je pro čtyřúhelníky dokončen.
3. Pro  $n \geq 5$  budeme dokazovat sporem.

Předpokládejme, že mnohoúhelník  $A_1A_2 \dots A_n$  je maximální a zároveň nemá vnitřní úhly shodné. Podle lemmatu 3 a lemmatu 4 již víme, že takový mnohoúhelník je konvexní a délky jeho stran jsou shodné.

Uvažujme nyní sousední úhly  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \dots$ , pro které platí, že alespoň jeden je různý od ostatních. Existuje tak dvojice sousedních úhlů, které jsou různé.

Bez újmy na obecnosti (úhly lze přeznačit) nechť jsou to úhly  $\alpha$  a  $\beta$ . Ukážeme, že pak v této pětici úhlů existuje dvojice nesousedních taková, že velikost těchto úhlů je různá.

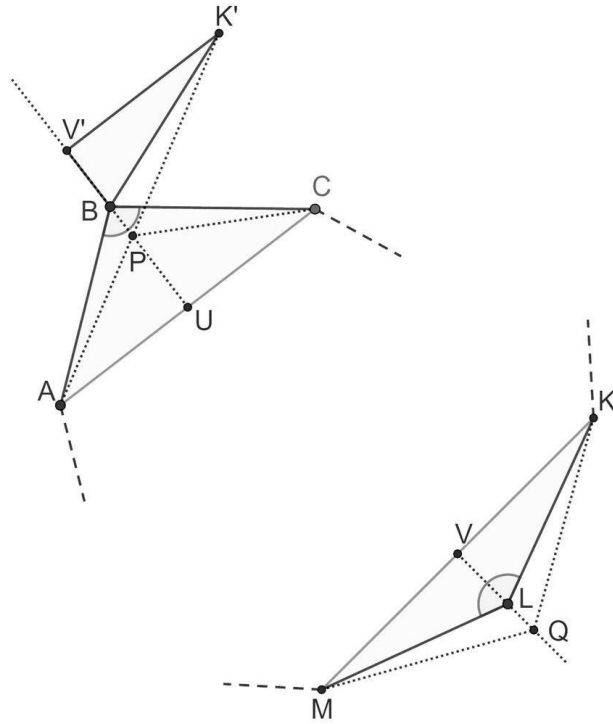
Pokud platí, že  $\alpha \neq \gamma$  nebo  $\beta \neq \delta$  je toto tvrzení evidentní, neboť se jedná o dvojice úhlů, které nejsou sousední. Pokud se tyto dvojice nesousedních úhlů rovnají a různé jsou úhly  $\alpha$  a  $\beta$ , pak tvrzení o existenci různých nesousedních úhlů také platí díky tomu, že  $\alpha = \gamma$  a  $\beta = \delta$ , čímž je posloupnost sousedních úhlů možné přepsat jako  $\alpha, \beta, \alpha, \beta, \varepsilon, \dots$ . Z tohoto zápisu je vidět, že existuje dvojice nesousedních úhlů, jejichž velikost je různá.

Díky tomu můžeme uvažovat ve zkoumaném mnohoúhelníku dva různé trojúhelníky  $ABC$  a  $KLM$  tvořené trojicí po sobě jdoucích vrcholů  $n$ -úhelníku, které nemají žádné společné vnitřní body a pro něž platí, že úhel u vrcholu  $B$  je menší než úhel u nesousedního vrcholu  $L$  (viz obrázek 30 na straně 60).

Oba trojúhelníky jsou rovnoramenné (protože  $n$ -úhelník má délky všech stran shodné). Protože úhel u vrcholu  $L$  jsme volili větší, platí, že délka strany  $KM$  je větší než délka strany  $AC$ . Sestrojíme výšky trojúhelníků na strany  $AC$  a  $KM$ . Paty těchto výšek označíme  $U$  a  $V$ . Sestrojíme trojúhelník  $BK'V'$  shodný s trojúhelníkem  $LKV$  tak, že  $B$  je obrazem vrcholu  $L$ ,  $V'$  je obrazem  $V$  a leží na polopřímce  $UB$  a  $K'$  je obrazem vrcholu  $K$ .

Najdeme řešení *Heronova problému*, kdy v jedné polorovině od hraniční přímky  $BU$  leží body  $K'$  a  $C$  a hledáme bod  $P$  na přímce  $BU$  takový, že  $|PK'| + |PC|$  je minimální.  $P$  leží v průniku  $K'A$  a  $BU$ , protože trojúhelník  $ABC$  je rovnoramenný a  $BU$  je výška na stranu  $AC$ . Proto se vrchol  $C$  v osově souměrnosti zobrazí na vrchol  $A$ .

Velikost úhlu  $ABC$  je menší než úhlu  $KLM$ . Nerovnost platí i pro poloviny těchto úhlů, a tedy  $|\sphericalangle CBU| < |\sphericalangle KLV|$ . Ze shodnosti trojúhelníků  $LKV$



Obrázek 30: Ilustrace konstrukce vedoucí ke sporu

a  $BK'V'$  navíc plyne  $|\sphericalangle K'BV'| = |\sphericalangle KLV|$ . Proto platí:

$$|\sphericalangle CBU| < |\sphericalangle K'BV'|.$$

Jelikož mezi úhly není rovnost, nesplyne bod  $P$  s vrcholem  $B$  (viz věta 7). Dále naneseme na polopřímku  $VL$  úsečku  $V'P$  tak, že  $V = V'$ . Koncový bod označíme  $Q$ . Pro součet délek ramen nově vzniklých rovnoramenných trojúhelníků  $ACP$  a  $KMQ$  platí:

$$\begin{aligned} |AP| + |PC| + |KQ| + |QM| &= 2(|PC| + |PK'|) \stackrel{\text{věta 6}}{<} \\ &< 2(|BC| + |K'B|) = |AB| + |BC| + |KL| + |LM|. \end{aligned}$$

Zároveň platí, že obsah trojúhelníku  $BPK'$  je větší než obsah trojúhelníku  $BPC$ , protože výška prvního je rovna  $|V'K'| = \frac{1}{2}|MK|$  a výška druhého je

rovna  $|CU| = \frac{1}{2}|AC|$ . Navíc víme, že  $|AC| < |KM|$ . Ze vztahu mezi obsahy těchto trojúhelníků lze odvodit následující nerovnost:

$$S_{\triangle ABC} - 2S_{\triangle BPC} + S_{\triangle KLM} + 2S_{\triangle BPK'} > S_{\triangle ABC} + S_{\triangle KLM}.$$

Pokud bychom tedy v  $n$ -úhelníku nahradili vrchol  $B$  vrcholem  $P$  a vrchol  $L$  vrcholem  $Q$ , dostali bychom  $n$ -úhelník o menším obvodu s větším obsahem. Nyní je možné u obou trojúhelníků postupovat jako v důkazu lemmatu 4 u trojúhelníku  $A_1A_3B$  a změnit obvod  $n$ -úhelníku na obvod původní a přitom zachovat obsah. Po této úpravě bude mít nově vzniklý  $n$ -úhelník stejný obvod jako  $A_1A_2 \dots A_n$ , ovšem větší obsah, a to je spor s předpokladem, že mnohoúhelník  $A_1A_2 \dots A_n$  je maximální.

□

(Tikhomirov, 1986)

Z lemmat 4 a 5 lze dojít k závěru, že jestliže maximální  $n$ -úhelník existuje, pak je pravidelný.

#### 4.3.2 Problém princezny Dídó

Za nejstarší písemnou zmínku týkající se potřeby vyřešit optimalizační problém je v literatuře (Tikhomirov, 1986) považován následující úryvek z *Aeneis* Publia Vergilia Mara, který obsahuje řešení isoperimetrické úlohy:

*„Potom připluli k místu, kde nyní veliké vidíš bašty a Karthága hrad, jenž nově tu právě se zvedá; tam si koupili půdu – a proto ji nazvali Byrsou, tolik, co volskou kůží by dokola obemknout mohli.“*

Publius Vergilius Maro, 1. st. př. n. l. (Maro, Vaňorský, 2018, s. 24)

Tato část epické básně, pocházející z prvního století před naším letopočtem, vypráví příběh založení města Karthága princeznou Dídó. Fénická princezna, která v devátém století před naším letopočtem na útěku od bratra Pigmaliona koupila podle legendy na území dnešního Tuniska půdu, přesvědčila obchodníka, aby jí prodal pouze tolik půdy, kolik bude schopna ohraničit pomocí býčí usně (Nahin, 2007). Římský historik Justinus popisuje, jak Dídó (v jeho verzi Elissa) obchodníka přelstila trikem, kdy kůži nařezala na tenké plátky, kterými vyznačila oblast, kde poté stála její pevnost, jež byla počátkem města Karthága. (De Carlos, 2008)

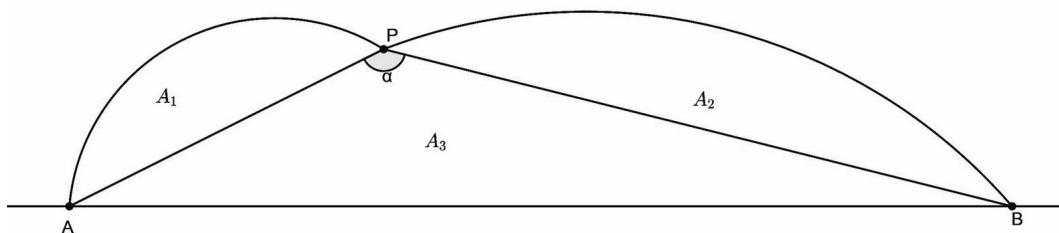
Tikhomirov (1986) uvádí, že v originále Vergilius použil sloveso *circumdare*, volně přeložené jako „ohraničit kružnicí“. Tento význam zachovává i český překlad, který je použit pro úvod kapitoly. Podle básně tak princezna našla optimální řešení, kdy obsah plochy oblasti, kterou ohraničila, byl maximální. *Problém Dídó* lze matematizovat do následující věty:

**Věta 20.** *Máme-li pomocí křivky délky  $l$  ohraničit oblast s co největším možným obsahem tvořenou touto křivkou a přímkou, pak platí, že není-li křivka půlkružnicí, pak existuje jiná křivka stejné délky  $l$ , která ohraničí větší plochu. Tedy pokud existuje křivka ohraničující maximální plochu, musí jí být půlkružnice.*

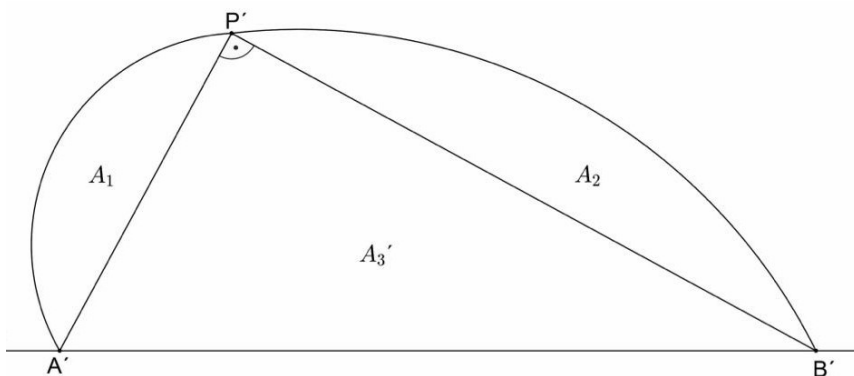
*Důkaz.* Necht křivka nad  $AB$  není půlkružnice a předpokládejme, že jde o takovou křivku, která ohraničuje největší možnou plochu.

Protože křivka není půlkružnice, tak na ní existuje bod  $P$  takový, že z něj  $AB$  není vidět pod pravým úhlem (podle *Thaletovy věty*). Sestrojíme úsečky  $AP$  a  $PB$ , čímž rozdělíme ohraničenou oblast na tři části  $A_1$ ,  $A_2$  a  $A_3$  (viz obrázek 31 na straně 63).

Dále zkonstruujeme podobný obrázek s tím rozdílem, že úhel u bodu  $P$  konstruujeme pravý. Tedy trojúhelník  $ABP$  se změní na trojúhelník  $A'B'P'$ , jehož délky stran  $A'P'$  a  $B'P'$  jsou shodné jako délky  $AP$  a  $BP$  u původního trojúhelníku. Také zachováme tvar a obsah křivek nad těmito úsečkami (viz obrázek 32 na straně 63).



Obrázek 31: Ilustrace části důkazu věty 20



Obrázek 32: Ilustrace další části důkazu věty 20

Změnou úhlu zůstaly zachovány obsahy ploch  $A_1$  a  $A_2$ . Plocha  $A_3$  se však nyní podle věty 11 zvětšila, a tedy obsah plochy pod nově vzniklou křivkou je větší. Původní křivka tak nemohla vytnout plochu o maximálním obsahu, což je spor s předpokladem, že původní křivka o tvaru, který není půlkružnicí, je maximální.

□

(Niven, 1981)

Za využití *problému Dídó* dokážeme větu následující:

**Věta 21.** *Pro každou jednoduchou uzavřenou křivku  $K_1$ , která není kružnicí existuje jiná křivka  $K_2$ , která má stejnou délku jako  $K_1$ , ale ohraničuje oblast o větším obsahu. Tedy pokud existuje jednoduchá uzavřená křivka s danou délkou ohraničující maximální oblast, pak je jí kružnice.*

*Důkaz.* Důkaz rozdělíme do dvou částí.

1. Jestliže je útvar ohraničený křivkou  $K_1$  nekonvexní, pak podle věty 1 víme, že křivka tvořící hranici konvexního obalu má menší obvod a větší obsah. Délku křivky tak ještě můžeme zvětšit a tím zvětšíme ještě více obsah.
2. Pokud je útvar ohraničený křivkou  $K_1$  konvexní, zvolíme na něm libovolně bod  $A$ . Najdeme bod  $B$  takový, že délka trajektorie (tedy křivky, která je tvořena částí obvodu) z bodu  $A$  do bodu  $B$  je rovna polovině délky celé křivky. To znamená, že ať se z bodu  $A$  do bodu  $B$  budeme po křivce pohybovat libovolným směrem, uražená vzdálenost bude vždy stejná.

Sestrojíme úsečku  $AB$ . Předpokládejme nyní, že úsečka  $AB$  rozdělila útvar na dvě části, jejichž obsahy jsou různé. Zobrazíme-li tu část, která má větší obsah, v osově souměrnosti s osou  $AB$ , dostaneme nový obrazec o stejném obvodu, jako měl původní (vzor měl obvod roven polovině původního obrazce), ale s větším obsahem.

Dále uvažujme případ, kdy úsečka  $AB$  rozdělila útvar na dva se stejným obsahem. Protože původní křivka není kružnicí, pak alespoň jedna z částí není tvořena půlkružnicí. Nyní stačí na tuto část aplikovat větu 20, a opět použít osovou souměrnost k nalezení křivky stejného obvodu, ale většího obsahu.

□

(Niven, 1981)

Důkazy vět 20 a 21 pocházejí od německého matematika Jakoba Steinera, který je provedl v roce 1836. Problémem je, že obě věty, stejně jako Zenodorova, předpokládají existenci maximální křivky  $n$ -úhelníku. Jako první na tento nedostatek upozornil Dirichlet. Říká, že Steiner způsobem popsáním výše dokázal pouze fakt,



že pokud křivka ohraničující maximální plochu existuje, pak je jí kružnice. Steiner na výtku reagoval tím, že je to přeci samozřejmé, že taková křivka existuje. (Blåsjö, 2005; Nahin, 2007)

Tikhomirov (1986) a Niven (1981) k větám uvádějí, že antičtí filosofové se obecně existenčními důkazy nezabývali a existenci mnoha objektů považovali za samozřejmou. Stejně tak Zenodorus považoval pravděpodobně existenci maximálního  $n$ -úhelníku za samozřejmou a o mnoho století později i Steiner. Niven (1981) dále uvádí, že právě v reakci na *Steinerův důkaz* se matematici začali existenčními důkazy zabývat daleko více.

*Steinerův důkaz* byl napaden například Rademacherem, Toeplitzem a dalšími. Jednoduchým logickým argumentem jej také kritizuje Perron. Jeho argumentaci bychom mohli formulovat takto:

*Nechť  $n$  je libovolné přirozené číslo různé od jedné. Pak je číslo  $n^2$  větší než  $n$ . Tedy pro každé přirozené číslo různé od jedné existuje větší přirozené číslo. Podle logiky Steinerova důkazu bychom tak mohli uzavřít, že jednička je největším přirozeným číslem.* (Niven, 1981)

Proto jsou dále věty dokázány ještě jednou bez předpokladu existence maxima. K tomu je potřeba zavést novou geometrickou konstrukci nazvanou *vnitřní rovnoběžný mnohoúhelník* (The Inner Parallel Polygon). (Niven, 1981)

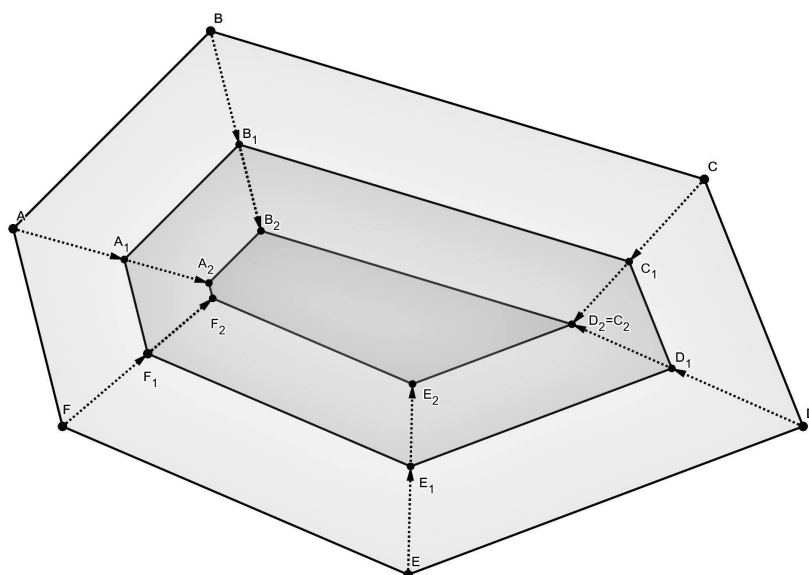
**Definice 12.** Procesem tvorby **vnitřního rovnoběžného mnohoúhelníku** budeme rozumět takovou konstrukci, kdy daný mnohoúhelník začneme zmenšovat tím způsobem, že jeho strany se pohybují rovnoměrnou rychlostí směrem dovnitř tak, že nově vzniklé strany jsou s původními rovnoběžné (vrcholy se tedy pohybují po osách stran k nim přilehlých). Tento pohyb děláme tak dlouho, dokud jedna nebo více stran nedegeneruje v bod.

(Niven, 1981)

**Pozn. 17.** Proces tvorby *vnitřního rovnoběžného mnohoúhelníku* může skončit třemi případy:

1. Vznikne nový mnohoúhelník o méně stranách a vrcholech než původní (viz obrázek 33).
2. Vznikne úsečka.
3. Vznikne jeden bod.

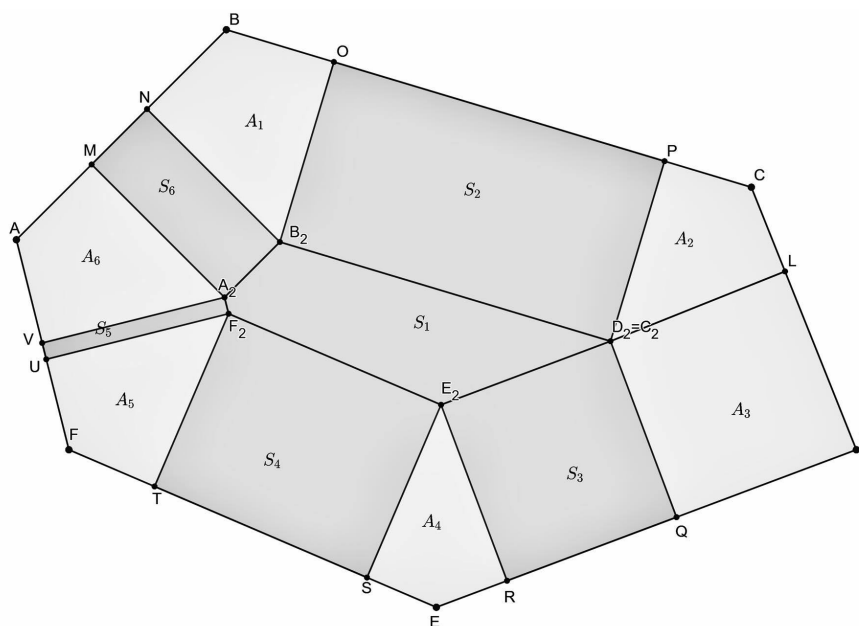
Obrázek 33 ukazuje proces, v němž šestiúhelník  $ABCDEF$  přejde přes mezistav  $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$  do pětiúhelníku  $A_2B_2C_2E_2F_2$ .



Obrázek 33: Znázornění procesu tvorby *vnitřního rovnoběžného mnohoúhelníku*

Potřebujeme najít vztah mezi obsahy a obvody původního a nově vzniklého  $n$ -úhelníku. Z nově vzniklých vrcholů  $n$ -úhelníku vedeme kolmice ke stranám původního  $n$ -úhelníku, na kterých původní bod ležel (viz obrázek 34 na straně 67).

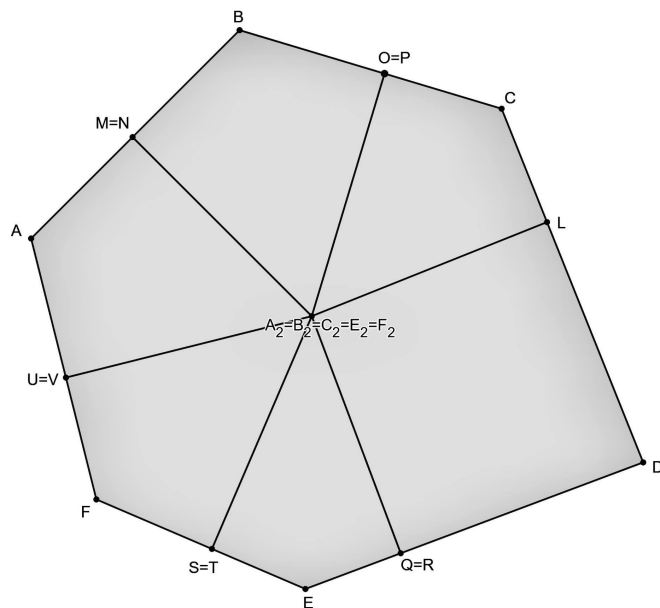
Tím získáme takový počet pravoúhelníků, kolik stran má nově vzniklý  $n$ -úhelník (na obrázku 34 je to pět pravoúhelníků pro pětiúhelník  $A_2B_2C_2E_2F_2$ ). Protože strany se v procesu tvorby vnitřního rovnoběžného mnohoúhelníku posouvaly stejnoměrně, mají pravoúhelníky stejnou délku jedné strany (v obrázku 34 tak platí například rovnost mezi délkami stran  $OB_2, NB_2, VA_2, TF_2, RE_2$  a odpovídajícími rovnoběžnými stranami každého z pravoúhelníků). Délku těchto úseček označíme  $r$ . (Niven, 1981)



Obrázek 34: Rozdělení mnohoúhelníku na disjunktní plochy

V obrázku 34 dále vidíme, že vzniknou oblasti tvořené deltoidy, jejichž dvě protilehlé strany jsou také dlouhé  $r$ . Dále je také patrné, že je možné tyto deltoidy seskupit v jeden spojitý obrazec (viz obrázek 35 na straně 68). (Niven, 1981)

Obsah  $S$  původního  $n$ -úhelníku je tedy možné vyjádřit jako součet obsahu nově vzniklého, menšího  $n$ -úhelníku  $S_1$  a obsahu pravoúhelníků a deltoidů. Obsah pravoúhelníků je možné vyjádřit jako délku obvodu menšího, nového  $n$ -úhelníku násobenou  $r$ . Označme obvod nového  $n$ -úhelníku  $P_1$  a  $S_d$  součet obsahů všech



Obrázek 35: Seskupení deltoidů o obsahích  $A_1, \dots, A_6$  z obrázku 34

deltoidů. Můžeme tedy psát:

$$S = S_1 + r \cdot P_1 + S_d.$$

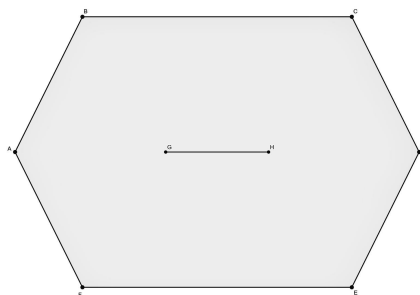
Z obrázku 34 na straně 67 je dále patrné, že původní obvod je součtem obvodu nového  $n$ -úhelníku a obvodu obrazce vzniklého složením deltoidů na obrázku 35. To budeme zapisovat jako:

$$P = P_1 + P_d,$$

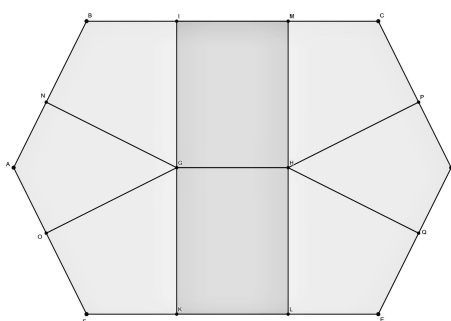
kde  $P_1$  je obvod nově vzniklého  $n$ -úhelníku a  $P_d$  obvod  $n$ -úhelníku tvořeného složením deltoidů. (Niven, 1981)

Stejně je potřeba postupovat pro případ, kdy by došlo k degeneraci  $n$ -úhelníku v úsečku délky  $l$  (viz obrázek 37 na straně 69).

Opět nad nově vzniklým útvarom sestrojíme kolmice z vrcholů. Vznikne nám tak dvojice pravoúhelníků a deltoidy, které opět lze přerovnat v jeden  $n$ -úhelník. Pravoúhelníky mají obsah roven délce úsečky násobené vzdáleností, o kterou je



Obrázek 36: Degenerace do úsečky



Obrázek 37: Rozdělení obsahu na pravoúhelníky a deltoidy

úsečka vzdálena od původní rovnoběžné strany, tu označme  $r$ . Pro obsah tedy platí:

$$S = 2rl + S_d.$$

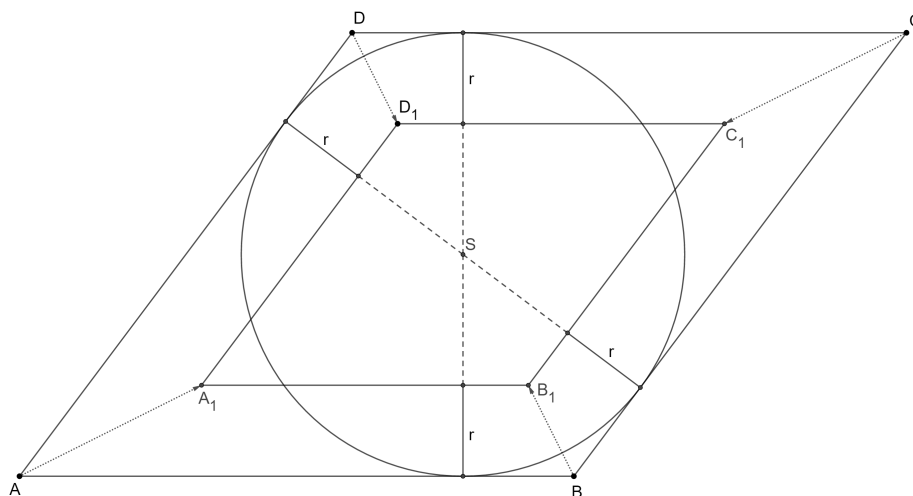
Obvod původního  $n$ -úhelníku je roven obvodu  $n$ -úhelníku vzniklého přeskupením deltoidů a dvojnásobku délky úsečky. Tedy platí:

$$P = P_d + 2l.$$

Protože se strany pohybují při procesu tvorby *vnitřního rovnoběžného mnohoúhelníku* stejnoměrně, platí, že právě tětiový mnohoúhelník degeneruje v jeden bod. To je znázorněno na obrázku 38 na straně 70. Vzdálenosti stran  $AB$  a  $A_1B_1$

a všech dalších rovnoběžných dvojic v obrázku jsou v procesu tvorby shodné. Označeny jsou  $r$ . Protože vrcholy se pohybují po osách úhlu, kde leží i střed  $S$  kružnice vepsané a od tohoto středu je to ke všem stranám původního obrazce stejně daleko (poloměr kružnice vepsané), degeneruje obrazec právě do tohoto bodu. (Niven, 1981)

Pokud naopak mnohoúhelník není tečnový, pak se jeho osy úhlů neprotínají v jednom bodě a nemůže do bodu degenerovat.



Obrázek 38: Tětivový mnohoúhelník degeneruje v bod

V dalším textu budeme používat tzv. isoperimetrický kvocient. Ten vychází z ekvivalentně vyslovené věty 21. Znění této ekvivalentní věty je následující:

**Věta 22.** *Pro každou oblast roviny s obsahem  $S$  a obvodem  $P$  platí nerovnost  $4\pi S \leq P^2$ . Rovnost nastává právě tehdy, když oblast je kruh.*

Ekvivalenci s původně vyslovenou větou lze spatřit, když do nerovnice dosadíme hodnoty odpovídající kruhu. Nechť je dán kruh o délce obvodu  $P$ , jeho obsah je potom roven  $\pi(\frac{P}{2\pi})^2$ , po dosazení do vztahu pak máme:

$$4\pi^2 \frac{P^2}{(2\pi)^2} = P^2 \leq P^2.$$

Pro kruh tedy nastává rovnost a věta říká, že kruh má největší obsah, proto jiné křivky budou ohraničovat oblast, jejíž obsah je menší, jak jsme ukázali ve větě 21. (Niven, 1981)

**Definice 13.** Poměr čísel  $4\pi S$  ku  $P^2$  z věty 22 nazveme isoperimetrickým kvocientem  $n$ -úhelníku.

Vlastnosti isoperimetrického kvocientu:

1. Kvocient pro kruh nabývá hodnoty 1.
2. Ostatní  $n$ -úhelníky mají kvocient menší než 1.
3. Podobné objekty mají stejný kvocient.

(Niven, 1981)

Niven (1981) na straně 86 také uvádí výčet některých isoperimetrických kvocientů:

Tabulka 1: Výčet některých hodnot isoperimetrického kvocientu

Kruh	1,000
Pravidelný osmiúhelník	0,948
Pravidelný šestiúhelník	0,907
Pravidelný pětiúhelník	0,865
Čtverec	0,785
Rovnostranný trojúhelník	0,605
Rovnoramenný pravoúhlý trojúhelník	0,539
Trojúhelník o stranách délek 1, 2, $\sqrt{3}$	0,486

Tabulka 1 mimo jiné ukazuje, že čím více vrcholů má pravidelný mnohoúhelník, tím větší hodnoty jeho isoperimetrický kvocient nabývá.

S definovanými pojmy isoperimetrického kvocientu a vnitřního rovnoběžného mnohoúhelníku již můžeme větu 21 dokázat bez předpokladu existence v ekvivalentním tvaru, ve kterém jsme ji vyslovili jako větu 22.

*Důkaz.* Důkaz rozdělíme na čtyři případy:

1. Je-li křivka hranicí tečnového mnohoúhelníku (mnohoúhelníku, jemuž lze vepsat kružnici), pak obsah tohoto mnohoúhelníku vypočítáme jako součet obsahů trojúhelníků vzniklých spojením vrcholů mnohoúhelníku se středem vepsané kružnice. Obsahy těchto trojúhelníků získáme jako polovinu součinu podstavy (příslušná délka strany mnohoúhelníku) a poloměru vepsané kružnice  $r$ :

$$S = \frac{1}{2}a_1r + \frac{1}{2}a_2r + \cdots + \frac{1}{2}a_nr,$$

kde  $a_1, \dots, a_n$  jsou délky stran mnohoúhelníku. Výraz na pravé straně lze upravit:

$$S = \frac{1}{2}r(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = \frac{1}{2}rP.$$

Protože kružnice o poloměru  $r$  je mnohoúhelníku vepsaná, platí, že obvod mnohoúhelníku je větší než  $2\pi r$  a jeho obsah je větší než  $\pi r^2$ . Vyjádřeno formou nerovností tak platí:

$$P > 2\pi r,$$

$$S > \pi r^2.$$

Z vyjádření obsahu dostaneme:

$$rP = 2S,$$

a pro výraz  $4\pi S$ :

$$4\pi S = 2\pi rP < P^2.$$

Tím je věta dokázána pro tečnové mnohoúhelníky.

2. Je-li křivka hranicí konvexního mnohoúhelníku, k důkazu použijeme matematickou indukci. Začneme pro  $n = 3$ , tedy trojúhelník. Protože každý trojúhelník je tečnovým mnohoúhelníkem (lze mu vepsat kružnici), věta platí podle bodu 1.



Předpokládejme, že věta platí pro konvexní mnohoúhelníky o menším počtu vrcholů než  $n$ , a ukážeme, že poté musí platit i pro mnohoúhelník o  $n$  vrcholech.

Nechť je dán konvexní mnohoúhelník  $M$  o  $n$  vrcholech, obsahu  $S$  a obvodu  $P$ . Pokud je tečnový, pak podle bodu 1 věta platí, pokud není, využijeme konstrukce *vnitřního rovnoběžného mnohoúhelníku*. Protože není tečnový, může buď vzniknout mnohoúhelník o méně vrcholech, nebo degenerovat v úsečku (osy jeho úhlů se neprotínají v jednom bodě, tedy nedegeneruje v bod). V případě, že vznikne mnohoúhelník  $M_1$  o méně než  $n$  vrcholech, věta pro tento mnohoúhelník podle indukčního předpokladu platí. Označme obsah tohoto menšího mnohoúhelníku  $S_1$  a obvod  $P_1$ . Platí mezi nimi vztah:

$$P_1^2 > 4\pi S_1.$$

Mnohoúhelníku  $M_d$  vzniklému seskupením deltoidů, které při tvorbě *vnitřního rovnoběžného mnohoúhelníku* vznikly, je možné vepsat kružnici o poloměru  $r$  a je tedy tečnový. Proto podle části 1 tohoto důkazu pro jeho obsah  $S_d$  a jeho obvod  $P_d$  platí:

$$P_d^2 > 4\pi S_d.$$

V prvním případě tohoto důkazu jsme také ukázali, že pro případ tětívového mnohoúhelníku platí nerovnost mezi jeho obvodem a obvodem kružnice, z toho pro mnohoúhelník  $M_d$  platí:

$$P_d > 2\pi r.$$

Obě strany nerovnosti vynásobíme  $2P_1$  a dostaneme výraz:

$$2P_1 P_d > 4\pi r P_1.$$

Z již odvozených vztahů mezi obsahy a obvody původního a nově vzniklého mnohoúhelníku při konstrukci *vnitřního rovnoběžného mnohoúhelníku*, které

řikají  $S = S_1 + rP_1 + S_d$  a  $P = P_1 + P_d$ , a nerovností popsaných v části dvě tohoto důkazu dojdeme k závěru:

$$P^2 = P_1^2 + 2P_1P_d + P_d^2 > 4\pi S_1 + 4\pi rP_1 + 4\pi S_d = 4\pi S.$$

Když mnohoúhelník degeneruje v úsečku, využijeme vztahu pro obsah  $S = 2rl + S_d$  a obvod  $P = P_d + 2l$ , které jsme odvodili výše (opět v části věnující se konstrukci *vnitřního rovnoběžného mnohoúhelníku*) pro případ, kdy polygon degeneruje v úsečku, v kombinaci s faktem, že pro útvar vzniklý z deltoidů bude platit (obdobně jako tehdy, když vznikl mnohoúhelník o menším počtu vrcholů než  $n$ ), že  $P_d^2 > 4\pi S_d$ , neboť útvar je tečnový. Kružnice mnohoúhelníku vzniklému z deltoidů vepsaná má poloměr  $r$ , a tak pro jeho obvod platí  $P_d > 2\pi r$ . Ze vztahů dostáváme:

$$\begin{aligned} P^2 &= (P_d + 2l)^2 = P_d^2 + 4P_d l + 4l^2 > 4\pi S_d + 8\pi r l + 4l^2 = \\ &= 4\pi(S_d + 2rl) + 4l^2 = 4\pi S + 4l^2 > 4\pi S. \end{aligned}$$

A tím je důkaz dokončen pro konvexní mnohoúhelníky.

3. Pro nekonvexní mnohoúhelník nalezneme jeho konvexní obal. Ten má větší obsah a menší obvod. Proto má i větší isoperimetrický kvocient. Ten je však podle případu 2 menší než jedna.
4. Pro jednoduché uzavřené křivky, které nejsou mnohoúhelníky, budeme důkaz vést sporem. Předpokládejme, že existuje taková jednoduchá uzavřená křivka, která není kružnicí a platí pro ni  $P^2 \leq 4\pi S$ . Jestliže by nastala rovnost, využijeme postup popsaný v důkazu věty 21 a najdeme křivku se stejným obvodem a větším obsahem. Tím předpokládaná nerovnost zůstane v platnosti a můžeme díky tomu předpokládat, že máme takovou křivku, pro

kterou platí  $P^2 < 4\pi S$ . Obdobně můžeme předpokládat, že křivka je konvexní. Kdyby nebyla, našli bychom její konvexní obal, čímž bychom zmenšili obvod a zvětšili obsah útvaru, jehož hranici tvoří. Tím by se isoperimetrický kvocient ještě zvětšil (také již bylo popsáno v důkazu věty 21).

Položme  $X = 4\pi S - P^2$ . Z předpokládané nerovnosti plyne, že  $X$  je větší než nula. Dále na křivce zvolíme  $n$ -tici bodů. Spojením sousedních bodů z této  $n$ -tice nám vznikne takový  $n$ -úhelník, který bude s rostoucím  $n$  stále lépe aproximovat obsah i obvod útvaru ohraničeného zkoumanou křivkou. Obsah tohoto  $n$ -úhelníku označme  $S_A$  a obvod  $P_A$ . Protože útvar ohraničený křivkou je konvexní, je  $n$ -úhelník do útvaru vepsaný. Z toho také plyne, že jeho obvod  $P_A$  je menší než délka křivky  $P$ .

Počet vrcholů  $n$  lze zvolit tak, aby se rozdíl skutečného obsahu útvaru a obsahu vepsaného mnohoúhelníku dal ohraničit libovolnou nezápornou konstantou. Zvolíme tedy  $n$  tak, aby platilo:

$$S - S_A < \frac{X}{4\pi}.$$

Obě strany vynásobíme  $4\pi$  a vyjádříme  $S_A$ :

$$S_A 4\pi > 4\pi S - X = 4\pi S - (4\pi S - P^2) = P^2 > P_A^2.$$

Vyjádříme-li nyní isoperimetrický kvocient vepsaného  $n$ -úhelníku, dostáváme  $\frac{4\pi S_A}{P_A^2} > 1$ , to je ovšem spor s definicí isoperimetrického kvocientu.

□

(Niven, 1981)

**Pozn. 18.** Důkaz *problému Dídó* je důsledkem této věty a využití osově souměrnosti. (Niven, 1981)

### 4.3.3 O kouli a válci – kniha druhá, věta devátá

Řešení isoperimetrického problému lze nalézt také v Archimédově díle *O kouli a válci* (On the Sphere and Cylinder), pocházejícím ze třetího století před naším letopočtem, kde mimo jiné autor popisuje vztah mezi objemy koule a válce (koule vepsaná do válce má objem rovný dvěma třetinám tohoto válce). (Netz, 2004)

Ve druhé knize se pak objevuje jako deváté tvrzení následující věta:

**Věta 23.** *Polosféra má větší objem než libovolný kulový vrchlík o stejném povrchu.*

(Netz, 2004)

Archimédés větu dokázal následujícím způsobem:

*Důkaz.* Necht jsou dány v prostoru dvě sféry. První má poloměr  $r_1$  a střed  $S_1$ , druhá  $r_2$  a střed  $S_2$  (viz obrázek 39 na straně 77). Kulový vrchlík o poloměru  $r = |MY| \neq r_1$  a výšce  $v = |MV|$  (označme jako  $XVY$ ) má stejný povrch jako kulový vrchlík tvořený polosférou koule o poloměru  $r_2$ . Ten označíme  $CAD$ . Chceme ukázat, že pro objemy těchto útvarů platí:

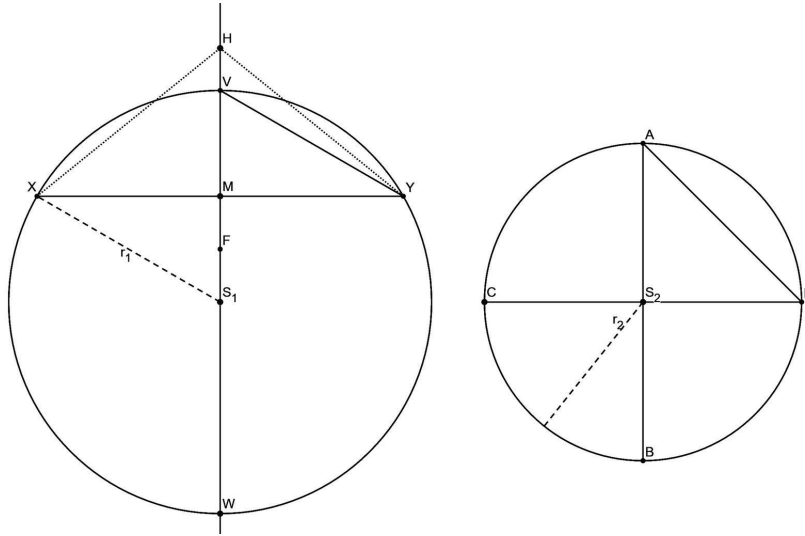
$$V_{CAD} > V_{XVY}.$$

Archimédés na polopřímce  $S_1V$  sestrojil bod  $H$  tak, aby platilo, že objem  $V_k$  kuželu, jehož výška  $v_k$  měla velikost  $|S_1H|$  a jehož poloměr byl roven poloměru podstavné kružnice  $MY$ , měl stejný objem jako kulový vrchlík  $XVY$ .

Na opačné polopřímce  $S_1W$  sestrojil bod  $G$  vzdálený o dvojnásobek  $r_1$  od středu  $S_1$ .

Z rovnosti mezi objemem kuželu a vrchlíku (odvozeného pomocí *Cavalieriho principu*) platí:

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}\pi r^2 v_k &= \frac{1}{3}\pi(3r_1 - v)v^2, \\ \frac{1}{3}\pi|MY|^2|MH| &= \frac{1}{3}\pi(3|S_1V| - |MV|)|MV|^2,\end{aligned}$$



Obrázek 39: Ilustrace k Archimédovu důkazu věty 23

zkrátíme  $\frac{1}{3}\pi$ :

$$|MY|^2|MH| = (3|S_1V| - |MV|)|MV|^2,$$

závorku  $(3|S_1V| - |MV|)$  nahradíme  $|MG|$ :

$$|MY|^2|MH| = |MG||MV|^2. \quad (4.1)$$

Tikhomirov (1986) uvádí, že Archimédés ve své době nemohl postupovat tímto algebraickým způsobem. Namísto toho našel rovnost mezi poměry délek úseček ležících na přímce  $VW$ . K rovnosti poměrů (4.2) je možné se dostat úpravou rovnosti (4.1). Pro  $|MY|$  podle *Eukleidovy věty* platí  $|MY|^2 = |MV||MW|$  (jedná se o geometrický průměr hodnot). Dosadíme za  $|MY|^2$ :

$$|MV||MW||MH| = |MG||MV|^2,$$

zkrátíme, vydělíme a dostáváme rovnost poměrů, kterou Archimédés použil k důkazu:

$$\frac{|HM|}{|VM|} = \frac{|GM|}{|WM|}. \quad (4.2)$$

Využijeme také rovnost povrchů mezi vrchlíkem a polosférou. Z *Pythagorovy věty* plyne, že  $|AD| = \sqrt{r_2^2 + r_2^2} = \sqrt{2}r$ . Z *Eukleidovy věty o odvěsně* plyne rovnost  $|VY| = \sqrt{|VM||VW|}$ . Dále platí:

$$\pi|VY|^2 = \pi|VM||VW| = 2\pi r_1 v. \quad (4.3)$$

Výraz  $2\pi r_1 v$  odpovídá povrchu kulového vrchlíku. Ten, jak víme z předpokladu věty, je roven povrchu kulové polosféry:

$$2\pi r_1 v = \frac{4\pi r_2^2}{2} = \pi|AD|^2. \quad (4.4)$$

Z rovnosti mezi rovnicemi (4.3) a (4.4) plyne:

$$\pi|VY|^2 = \pi|AD|^2, \quad (4.5)$$

$$|VY| = |AD|. \quad (4.6)$$

Dále sestrojíme na polopřímce  $VM$  úsečku  $VF$ , jejíž délka je shodná s délkou poloměru  $r_2$ . Je třeba ukázat, že platí nerovnost:

$$|WF||FV| > |WM||MV|. \quad (4.7)$$

Tikhomirov (1986) říká, že Archimédés tuto nerovnost odůvodnil pouze geometrickým pozorováním, kde došel k závěru, že větší obsah má ten z dvojice obdélníků stejného obvodu, jehož kratší strana je delší<sup>8</sup>.

Za využití rovnosti mezi povrchem vrchlíku a polosféry dojdeme ke vztahu:

$$\begin{aligned} 2\pi r_1 v &= 2\pi r_2^2, \\ 2\pi|GW||VM| &= 2\pi|VF|^2, \end{aligned}$$

zkrátíme  $2\pi$  a dostáváme:

$$|GW||VM| = |VF|^2. \quad (4.8)$$

---

<sup>8</sup>Algebraický důkaz této nerovnosti následuje v poznámce 19 za důkazem.

Dokážeme platnost nerovnosti:

$$|VF||VW| > |GM||VM|. \quad (4.9)$$

Nejprve  $|VW|$  rozepíšeme jako  $|VF| + |FW|$  a  $|GM|$  jako součet  $|WM| + |GW|$ :

$$|VF|(|VF| + |FW|) > (|WM| + |GW|)|VM|,$$

na obou stranách dokazované nerovnosti použijeme distributivní zákon:

$$|VF||VF| + |VF||FW| > |WM||VM| + |GW||VM|,$$

$$|VF|^2 + |VF||FW| > |GW||VM| + |WM||VM|.$$

Z rovnosti (4.8) již víme, že kvadratický člen na levé straně se rovná prvnímu sčítanci na pravé straně a z nerovnosti (4.7) víme, že druhý člen na levé straně je větší, než druhý člen na pravé straně. Nerovnost (4.9) je tak dokázána.

Vyjádríme objem polosféry:

$$V_{CAD} = \frac{2\pi}{3}|S_2D|^3 = \frac{2\pi}{3}|S_2D||S_2D|^2 \stackrel{\text{Pythag. věta}}{=} \frac{\pi}{3}|S_2D||AD|^2 \stackrel{(4.6)}{=} \frac{\pi}{3}|S_2D||VY|^2.$$

Z konstrukce úsečky  $VF$  platí  $|VF| = |S_2D|$  a podle rovnosti (4.3) můžeme psát:

$$V_{CAD} = \frac{\pi}{3}|VF||VY|^2 = \frac{\pi}{3}|VF||VM||VW|,$$

podle nerovnosti (4.9) vynásobené  $|VM|$  pak platí:

$$V_{CAD} = \frac{\pi}{3}|VF||VM||VW| > \frac{\pi}{3}|GM||VM|^2 \stackrel{(4.1)}{=} \frac{\pi}{3}|HM||MY|^2.$$

Výraz  $\frac{\pi}{3}|HM||MY|^2$  je roven objemu  $V_k$  kuželu zkonstruovaného na začátku důkazu. Kužel jsme konstruovali tak, aby jeho objem byl roven objemu kulové úseče  $V_{XVY}$ . Platí tedy, že  $V_{CAD} > V_k = V_{XVY}$ , což znamená, že ze všech kulových vrchlíků s daným povrchem má největší objem polosféra.  $\square$

(Tikhomirov, 1986)

**Pozn. 19.** Použijeme-li moderní algebraickou notaci, lze nerovnost (4.7) dokázat například takto:

Označme  $h = |MV|$ . Dokazovanou nerovnost je pak možné přepsat do tvaru:

$$(2r_1 - r_2)r_2 > (2r_1 - h)h,$$

pro  $r_1 \neq h$ . Rovnost (4.8) lze zapsat jako  $r_2^2 = r_1h$ . Nerovnost dokážeme zvlášť pro případ, kdy  $h < r_1$ , a pro případ, kdy  $h > r_1$ .

1. Necht  $h < r_1$ , pak platí:

$$\begin{aligned} r_2^2 = r_1h > h^2 &\implies r_2 > h \implies r_1 - r_2 < r_1 - h \implies \\ \implies (2r_1 - r_2)r_2 &= r_1^2 - (r_1 - r_2)^2 > r_1^2 - (r_1 - h)^2 = (2r_1 - h)h. \end{aligned}$$

2. Necht  $h > r_1$ , pak platí, že  $r_2^2 = r_1h < h^2$  a  $r_2^2 = r_1h > r_1^2$ . Z nerovností plyne, že  $r_1 < r_2 < h$ , a potom tedy platí:

$$\begin{aligned} r_2 - r_1 < h - r_1 &\implies (2r_1 - r_2)r_2 = \\ = r_1^2 - (r_1 - r_2)^2 &> r_1^2 - (r_1 - h)^2 = (2r_1 - h)h. \end{aligned}$$

(Tikhomirov, 1986)

#### 4.3.4 Tartagliův problém

Optimalizační problém řešil i Niccolo Tartaglia ve druhé polovině šestnáctého století v Itálii. Jeho jméno je nejčastěji spojováno s řešením kubické rovnice a *Cardanovými vzorci*, které objevil ve velmi krátkém čase před matematickou soutěží. V jeho díle se objevuje i následující optimalizační problém, který Tartaglia úspěšně vyřešil: „Rozděl číslo osm na dvě části tak, že součin součinu těchto částí s jejich rozdílem je maximální.“ (Tikhomirov, 1986; Nahin, 2007)

Přestože Tartaglia nezveřejnil svůj způsob řešení, dostal se ke správné odpovědi  $a = 4 + \frac{4}{\sqrt{3}}$  a  $b = 4 - \frac{4}{\sqrt{3}}$ . (Nahin, 2007)



Jakým způsobem mohl Tartaglia postupovat odhaduje Tikhomirov (1986), který úlohu řeší pro obecné číslo  $S$ . Problém můžeme formulovat jako větu následovně:

**Věta 24.** *Nechť je dána dvojice čísel  $a, b$  takových, že  $a > b$  a  $a + b = S$ . Jestliže platí  $\left(\frac{S}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{S}{2}\right)^2 = (a - b)^2$ , pak výraz  $ab(a - b)$  nabývá svého maxima.*

*Důkaz.* Rozdíl  $(a - b)$  označíme jako neznámou  $x$ . Protože platí:

$$a - b = x,$$

$$a + b = S,$$

dostáváme  $a = \frac{(S+x)}{2}$  a  $b = \frac{(S-x)}{2}$ . Hledáme maximum funkce:

$$f(x) = ab(a - b) = \frac{(S + x)}{2} \frac{(S - x)}{2} x.$$

Označme hledané maximum  $M$  pro  $x \geq 0$ . Pak pro neznámou  $x$  dostáváme rovnici:

$$\frac{(S + x)}{2} \frac{(S - x)}{2} x = M,$$

kteřou upravíme na kubickou rovnici:

$$x^3 - S^2x + 4M = 0.$$

Rovnici upravíme na tvar:

$$\frac{-x^3 + S^2x}{4} = M.$$

Funkce na levé straně je graficky znázorněna na obrázku 40 na straně 82. Řešení rovnice je průnik jejího grafu a přímky  $y = M$ . Z vlastností kubické funkce je patrné, že řešením bude dvojnásobný kladný kořen a kořen záporný. Kladný kořen označíme  $\alpha$  a záporný  $\beta$ . Platí tedy:

$$x^3 - S^2x + 4M = (x - \alpha)^2(x - \beta),$$

pravou stranu roznásobíme a dostaneme rovnost:

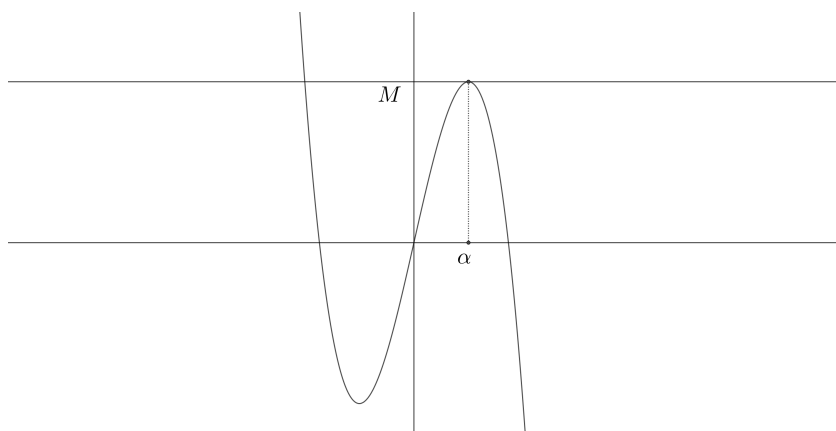
$$x^3 - S^2x + 4M = x^3 + (-2\alpha - \beta)x^2 + (\alpha^2 + 2\alpha\beta)x - \alpha^2\beta.$$

Z rovnosti koeficientů u odpovídajících mocnin neznámé  $x$  zjišťujeme:

$$0 = -2\alpha - \beta,$$

$$-S^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta,$$

$$4M = -\alpha^2\beta.$$



Obrázek 40: Graf funkce  $y = \frac{-x^3 + S^2x}{4}$  a její maximum  $M$  pro  $x \geq 0$

Z první rovnice dostáváme  $2\alpha = -\beta$ . Po dosazení do druhé pak  $S^2 = 3\alpha^2$ . Ze třetí získáme  $2M = \alpha^3$ . Po úpravě platí, že:

$$(a - b)^2 = \alpha^2 = \frac{S^2}{3} = \left(\frac{S}{2}\right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{S}{2}\right)^2,$$

a pro  $a$  a  $b$ :

$$a = \frac{S + x}{2} = \frac{S + (a - b)}{2} = \frac{S + \frac{S}{\sqrt{3}}}{2},$$

$$b = \frac{S - x}{2} = \frac{S - (a - b)}{2} = \frac{S - \frac{S}{\sqrt{3}}}{2}.$$

□

(Tikhomirov, 1986)

## 4.4 Brachistochrona

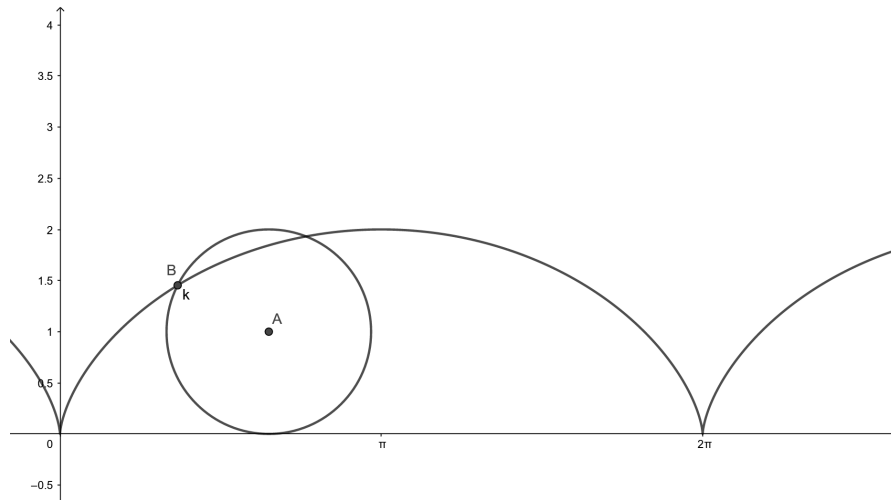
Slovo *brachistochrona* je složeno ze dvou řeckých slov *brachistos*, znamenajícího nejkratší, a *chronos*, znamenajícího čas. Problém, který je tímto slovem označen, pochází od švýcarského matematika Johanna Bernoulliho. Bernoulli se ptá, jaký tvar musí mít křivka spojující body  $A$  a  $B$ , aby bod, který začíná pohyb v bodě  $A$ , dorazil po křivce do bodu  $B$  za nejkratší dobu. Problém publikoval ve vědeckém časopise *Acta Eruditorum* v roce 1696. Zmínil, že sám má velmi důvtipné řešení, které zatím ale nechce publikovat, a vyzývá ostatní k vyřešení problému (údajně chtěl svému bratrovi Jacobovi dokázat, že je lepším matematikem, a že on tento problém nevyřeší). (Courant, Robbins, 1996; 3Blue1Brown, 2016; Tikhomirov, 1986)

Na problému je zajímavé, že uvažuje gravitační zrychlení a využívá tak vlastnosti reálného světa. Podobnými problémy se před Bernoullim zabýval již Galileo. Ten dospěl například k závěru, že řešením nemůže být úsečka (i když se jedná o nejkratší vzdálenost), a že tělesa pohybující se z bodu  $A$  do bodu  $B$  po kruhovém oblouku potřebují k pohybu kratší čas. (3Blue1Brown, 2016; Tikhomirov, 1986)

K vyřešení problému je potřeba najít optimum mezi délkou křivky a tvarem, kdy gravitační síla bodu udělí potřebnou rychlost k dosáhnutí minimálního času. Pro řešení problému v té době neexistovala žádná známá metoda, i proto se stal velice populárním a mimo Johanna Bernoulliho s jeho řešením nezávisle na sobě přišli Leibniz, Jacob Bernoulli (bratr Johanna), l'Hospital a také Newton, který řešení zaslal anonymně. Jacob Bernoulli údajně poznal, komu řešení patří, a Newton později přiznal, že skutečně problém řešil on a jeho vyřešení mu zabralo pouze

jednu noc (zatímco Johannu Bernoullimu dva týdny). Ukázalo se, že řešením je část cykloidy.<sup>9</sup> (3Blue1Brown, 2016; Tikhomirov, 1986)

**Definice 14. Cykloida** je křivka, kterou vykreslí bod ležící na kružnici o poloměru  $r$ , která se valí bez prokluzu po přímce (viz obrázek 41).



Obrázek 41: Cykloida tvořená bodem  $B$  na kružnici o poloměru jedna

(Courant, Robbins, 1996)

Cykloidu popíšeme parametricky. Protože se pohyb bodu po cykloidě skládá z pohybu po kružnici a pohybu posuvného ve směru, kterým se valí kružnice, vyjdeme při popisu z parametrických rovnic kružnice o poloměru  $r$ :

$$x = r \sin a,$$

$$y = r \cos a.$$

<sup>9</sup>Cykloida (v poloze „vzhůru nohama“) je nejen *brachistochronou*, ale také tzv. *tautochronou*, tedy křivkou, pro kterou platí, že doba, za kterou hmotný bod bez tření dorazí do nejnižšího bodu, je nezávislá na poloze, ve které bod svůj pohyb začíná. Tuto vlastnost objevil Huygens v 17. století. (Wagon, 2010)

Parametrických popisů kružnice existuje mnoho, důležité je, aby popis, který vybereme, splňoval to, že s rostoucím parametrem  $a$  se bod vykreslující kružnici pohybuje v záporném směru otáčení (po směru hodinových ručiček). To námi zvolený popis splňuje.

Protože chceme, aby se cykloida „kutálela“ po ose  $x$ , musí být  $y$ -ová souřadnice středu kružnice rovna poloměru  $r$ . Dostáváme tak rovnice:

$$\begin{aligned}x &= r \sin a, \\y &= r \cos a + r.\end{aligned}$$

Dále požadujeme, aby cykloida vycházela z počátku, tedy při nulovém odvalení kružnice bude bod, který cykloidu vykresluje (v obrázku 41 na straně 84 se jedná o bod  $B$ ) mít souřadnice  $[0; 0]$ . To pro naši rovnici neplatí, výchozí bod má souřadnice  $[0; 2r]$  a pohybuje se tak středově souměrně podle středu kružnice s bodem, který potřebujeme popsat. Rovnice tedy musí být ve tvaru:

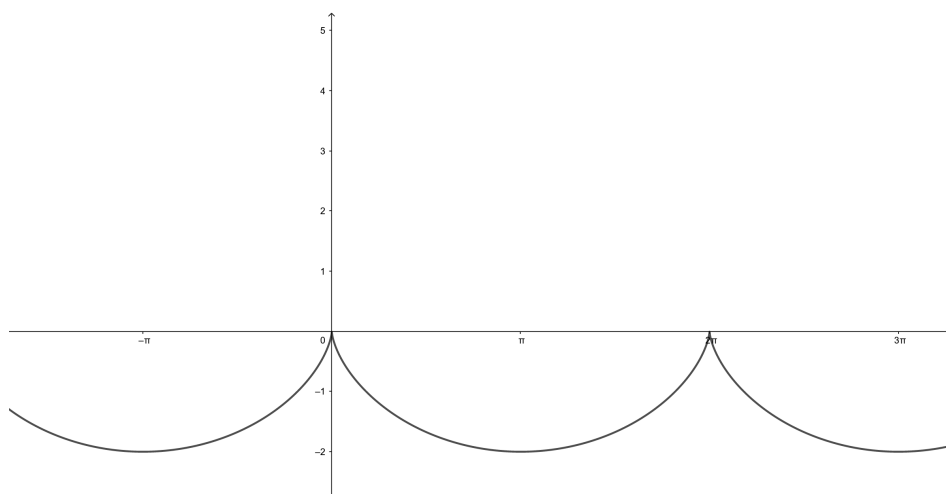
$$\begin{aligned}x &= r(-\sin a), \\y &= r(-\cos a + r).\end{aligned}$$

Už zbývá pouze doplnit pohyb kružnice po ose  $x$ . Ten nemá vliv na  $y$ -ovou souřadnici. Co se  $x$ -ové souřadnice týče, ta se zvětšuje o tolik, o kolik se otočí kružnice, tedy o  $r \cdot a$ . Proto tento výraz přičteme a dostaneme:

$$\begin{aligned}x &= r(-\sin a) + ra = r(a - \sin a), \\y &= r(-\cos a + r) = r(1 - \cos a).\end{aligned}$$

Pro *brachistochronu* bude však cykloida „vzhůru nohama“ oproti cykloidě na obrázku 41 na straně 84. Její rovnice tak má opačnou  $y$ -ovou souřadnici, tedy:

$$\begin{aligned}x &= r(-\sin a) + ra = r(a - \sin a), \\y &= r(\cos a - r) = r(-1 + \cos a).\end{aligned}$$



Obrázek 42: *Brachistochrona* je částí křivky podobné této

Vypadat bude jako na obrázku 42. Tento tvar budeme potřebovat k důkazu toho, že *brachistochronou* je právě část cykloidy. K důkazu také použijeme tzv. *Snellův zákon*.

#### 4.4.1 Snellův zákon

V kapitole 4.1 jsme zmínili Heronovu a Damianovu myšlenku, že příroda nedělá nic nadarmo. Tuto myšlenku o mnoho let později podrobněji popsal Fermat, když také řekl, že světlo se šíří z bodu  $A$  do bodu  $B$  po nejrychlejší dráze. (Havelka, 1955; 3Blue1Brown, 2016)

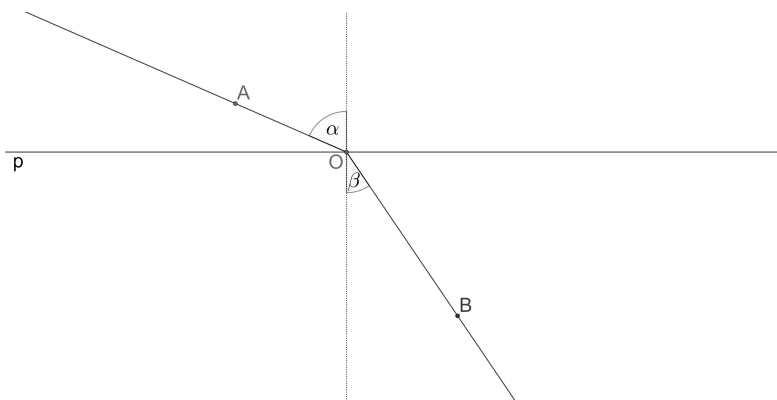
Tuto myšlenku budeme nazývat *Fermatovým principem*. Ten můžeme využít k řešení dalšího optimalizačního problému ve fyzice známého jako *Snellův zákon*. Ten později použijeme také k řešení *problému brachistochrony*.

*Snellův zákon* říká, jakým způsobem se šíří světlo, když přechází z jednoho média (například vzduchu) do jiného (například vody). V různých prostředích (médiích) se světlo šíří jinou rychlostí. To, jak velkou, udává tzv. *index lomu*. Zákon

se také nazývá *zákon lomu*. Matematicky bychom jej mohli vyjádřit následující větou:

**Věta 25.** *V polorovině, jejíž hraniční přímkou je přímka  $p$  (viz obrázek 43) a náleží jí bod  $A$ , se světlo šíří rychlostí  $v_1$ . V opačné polorovině rychlostí  $v_2$ . Jestliže se světelný paprsek pohybuje z bodu  $A$  do bodu  $B$  po nejkratší možné cestě a část cesty ležící v polorovině, kde se světlo šíří rychlostí  $v_1$ , svírá s normálou přímky  $p$  úhel  $\alpha$  a část cesty ležící v polorovině, kde se světlo šíří rychlostí  $v_2$ , svírá s normálou přímky  $p$  úhel  $\beta$ , pak platí:*

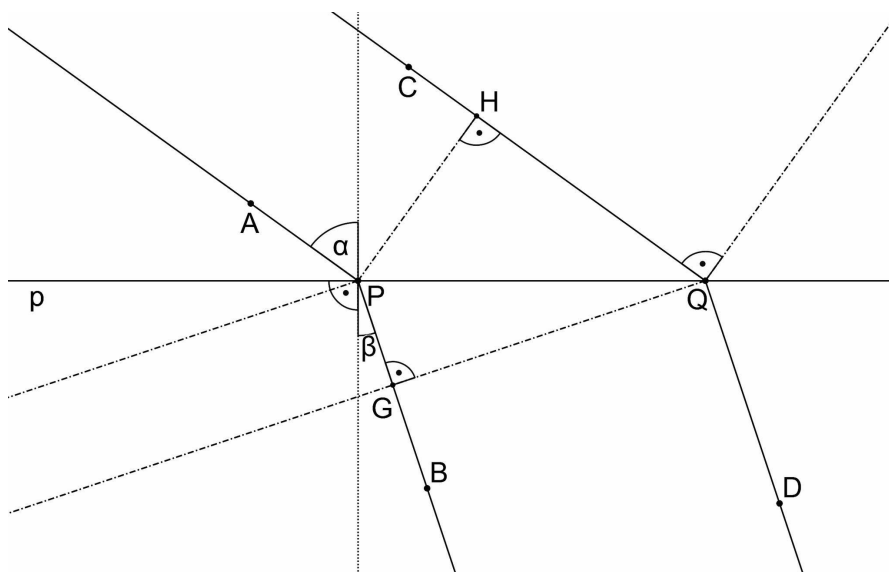
$$\frac{\sin \alpha}{v_1} = \frac{\sin \beta}{v_2}.$$



Obrázek 43: Ilustrace *Snellova zákona*

*Důkaz.* Polopřímky  $PA$  a  $QC$ , představující paprsky dopadajícího světla, jsou rovnoběžné (viz obrázek 44 na straně 88). Pod úhlem který svírají s přímkou  $p$ , představující rozhraní dvou médií, se šíří ve vlnách světlo, které je znázorněno čerchovanou čarou  $PH$ . Tato vlna je normálou přímky  $AP$ .

Světlo při průchodu přes přímku  $p$  změní směr (úhel mezi paprskem a normálou se změní z úhlu  $\alpha$  na úhel  $\beta$ ) a šíří se dál v novém prostředí (znázorněno čerchovanou polopřímkou  $QG$  a s ní rovnoběžnou čarou procházející bodem  $P$ ).



Obrázek 44: Lom rovnoběžných paprsků světla

Ve chvíli, kdy světlo pohybující se po polopřímce  $PA$  dorazí k přímce  $p$ , zbývá světlu pohybujícímu se po polopřímce  $QC$  urazit ještě úsek  $HQ$ . Nechť mu to trvá  $t$  sekund. Délka úseku  $HQ$  pak tedy je  $|HQ| = v_1 t$ .

V tomto časovém úseku světlo, které se pohybovalo po polopřímce  $PA$ , dorazí do bodu  $G$  (jak je znázorněno čerchovanou čarou na obrázku 44). Vzdálenosti  $PG$  tak odpovídá  $|PG| = v_2 t$ .

Protože polopřímky  $PA$  a  $QC$  jsou rovnoběžné, platí, že úhel  $\alpha$  svírá také normála přímky  $p$  s polopřímkou  $QH$ . Protože úsečka  $PH$  je kolmá k polopřímce  $QH$ , zbývá na úhel mezi normálou přímky  $p$  a úsečkou  $PH$  úhel velikosti  $(90^\circ - \alpha)$ . Proto úhel sevřený přímkou  $p$  a úsečkou  $PH$  je  $\alpha$ . Odtud dostáváme:

$$\sin \alpha = \frac{|HQ|}{|PQ|} = \frac{v_1 t}{|PQ|}.$$

Tedy pro  $|PQ|$  platí:

$$|PQ| = \frac{v_1 t}{\sin \alpha}.$$



Přímka  $p$  svírá s polopřímkou  $PB$  úhel velikosti  $(90^\circ - \beta)$ . Proto je velikost úhlu  $PQG$  také  $\beta$ . Odtud dostáváme:

$$\sin \beta = \frac{|PG|}{|PQ|} = \frac{v_2 t}{|PQ|}.$$

Tedy pro  $|PQ|$  platí:

$$|PQ| = \frac{v_2 t}{\sin \beta}.$$

Dosadíme za  $|PQ|$  první vyjádření a dostaneme vztah:

$$\frac{v_1 t}{\sin \alpha} = \frac{v_2 t}{\sin \beta}.$$

Upravíme do požadovaného tvaru a dostáváme:

$$\frac{\sin \alpha}{v_1} = \frac{\sin \beta}{v_2}.$$

□

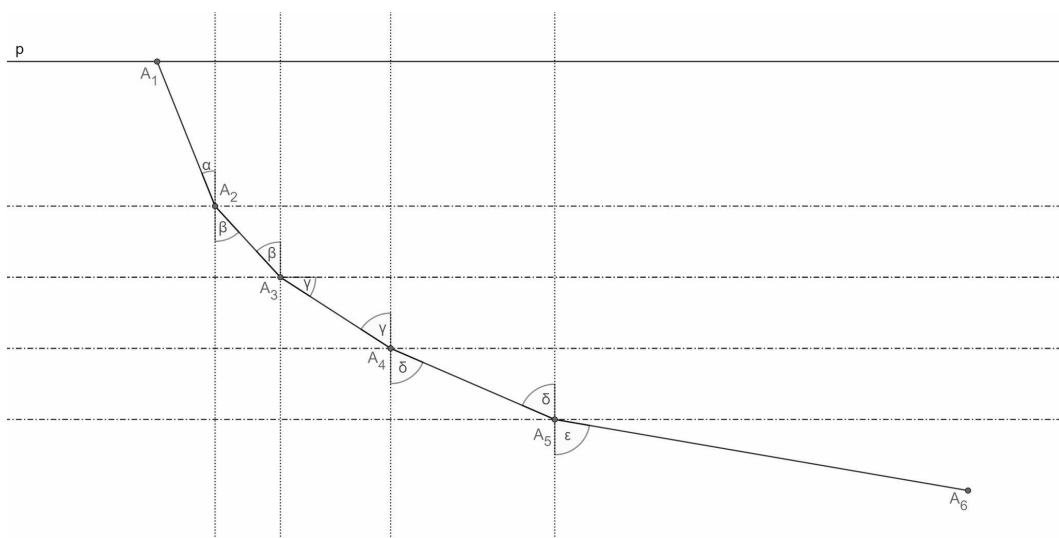
#### 4.4.2 Metoda nalezení brachistochrony Johanna Bernoulliho

**Věta 26.** *Brachistochronou je část cykloidy.*

*Důkaz.* Johann Bernoulli k vyřešení problému využil *Fermatova principu* a *Snellova zákona*. Místo bodu pohybujícího se po křivce Bernoulli uvažoval částici světla pohybující se skrz velké množství prostředí s různými indexy lomu (tedy v každém prostředí se částice pohybuje jinou rychlostí). Vodorovné čerchované čáry v obrázku 45 na straně 90 znázorňují hranici mezi dvěma prostředími. Světlo se pohybuje z bodu  $A_1$  do bodu  $A_6$  a opakovaně se láme podle *Snellova zákona*. (3Blue1Brown, 2016; Levi, 2015; Tikhomirov, 1986)

Pro konkrétní případ na obrázku 45 tak platí:

$$\frac{\sin \alpha}{v_1} = \frac{\sin \beta}{v_2} = \frac{\sin \gamma}{v_3} = \frac{\sin \delta}{v_4} = \frac{\sin \varepsilon}{v_5}.$$



Obrázek 45: Lom světla jako paralela tělesa putujícího po křivce

Podíl sinu úhlu, který svírá dopadající paprsek s kolmicí k hranici prostředí, a rychlosti v odpovídajícím prostředí je pro všechna prostředí konstantní. Stejně tomu bude, pokud počet prostředí zvýšíme na libovolně velké  $n$ , kdy se šířka jednotlivých prostředí bude zmenšovat tak, až bude zanedbatelná (světlo se láme podle *Snellova zákona* v každém okamžiku). Pak platí:

$$\frac{\sin \theta_1}{v_1} = \frac{\sin \theta_2}{v_2} = \dots = \frac{\sin \theta_n}{v_n} = c.$$

Protože ale hledáme nejrychlejší cestu pro částici, na kterou působí gravitace, bude se její rychlost měnit, a to podle *zákona zachování energie*, který říká:

$$mgy = \frac{1}{2}mv^2,$$

kde  $m$  je hmotnost,  $g$  gravitační zrychlení,  $y$  změna  $y$ -ové souřadnice a  $v$  rychlost. Po úpravách rovnosti získáme vztah:

$$v = \sqrt{2gy}.$$

Výraz  $\sqrt{2g}$  je konstantní, označíme jej  $k$ . Rychlost těsně před lomem v  $i$ -tém prostředí tedy bude rovna:

$$v_i = k\sqrt{y_i},$$

kde  $y_i$  značí, o kolik se částice ve směru souřadnice  $y$  od začátku svého pohybu pohnula. Takto vyjádřenou rychlost dosadíme do rovnosti, kterou jsme získali ze *Snellova zákona*:

$$\frac{\sin \theta_1}{k\sqrt{y_1}} = \frac{\sin \theta_2}{k\sqrt{y_2}} = \dots = \frac{\sin \theta_n}{k\sqrt{y_n}} = c,$$

odkud:

$$\frac{\sin \theta_1}{\sqrt{y_1}} = \frac{\sin \theta_2}{\sqrt{y_2}} = \dots = \frac{\sin \theta_n}{\sqrt{y_n}} = c,$$

kde  $c$  je konstanta. Dostáváme tak vztah:

$$\frac{\sin \theta_i}{\sqrt{y_i}} = c.$$

Pro libovolný bod na hledané křivce proto platí, že poměr úhlu mezi tečnou ke křivce v tomto bodě a odmocniny z výšky, kterou v daném bodě částice urazila, je konstantní. (3Blue1Brown, 2016; Levi, 2015)

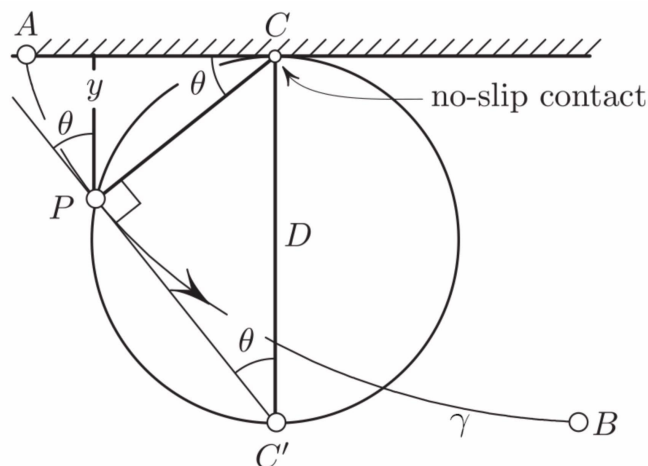
Bernoulli dále použil přepis pomocí nekonečně malých elementů, kdy v malých trojúhelnících v obrázku 45 na straně 90 platí  $\sin \theta_i = \frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$ , dostal se k výrazu:

$$dx = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{C - y}} dy,$$

v němž Bernoulli rozeznal diferenciální rovnici, jejíž řešením jsou parametrické rovnice cykloidy popsané na začátku kapitoly 4.4. (Tikhomirov, 1986)

Protože Bernoulli již musel mít jisté znalosti diferenciálního počtu a znát řešení diferenciální rovnice, pokusíme se tuto závěrečnou fázi obejít geometrickou metodou, kterou nabízí Levi (2015).

Nechť je dána cykloida generovaná bodem  $P$  na kružnici valící se po přímce tak, jak je znázorněno na obrázku 46 na straně 92. Bod dotyku přímky a kružnice



Obrázek 46: Odvození vlastnosti cykloidy (Levi, 2015)

(na obrázku označený  $C$ ) lze chápat jako osu otáčení bodu  $P$  pro daný okamžik. Pohyb  $P$  pro daný okamžik lze chápat jako pohyb kyvadla zavěšeného v bodě  $C$ . Toto kyvadlo opisuje kruhový oblouk a tedy tečna v bodě  $P$  je kolmicí k úsečce  $PC$ . Proto i tečna cykloidy v bodě  $P$  je kolmá k  $PC$  (v obrázku přímka  $C'P$ ). Trojúhelník  $CPC'$  je proto pravoúhlý. Podle *Thaletovy věty* je strana  $CC'$  průměrem kružnice. Úhel sevřený tímto průměrem a tečnou  $C'P$  označíme  $\theta$ . Protože velikost úhlu v trojúhelníku  $CPC'$  u vrcholu  $C$  je  $(90^\circ - \theta)$ , má úhel sevřený úsečkou  $CP$  a přímkou, po které se kružnice valí, velikost také  $\theta$ . Bod  $P$  kolmo promítneme na přímkou, po níž se kružnice valí, a průmět nazveme  $P'$ . Vzdálenost  $|PP'|$  označíme  $y$  (jako v obrázku 46). Trojúhelník  $PCP'$  je podobný trojúhelníku  $PC'C$  (např. podle věty *uu*). Úsečka  $PC$  lze vyjádřit pomocí úhlu a průměru  $D$ :

$$|PC| = D \sin \theta.$$

Úsečku  $y$  pak lze vyjádřit takto:

$$y = |PC| \sin \theta = D \sin^2 \theta.$$

Rovnost upravíme na tvar:

$$\frac{1}{\sqrt{D}} = \frac{\sin \theta}{\sqrt{y}},$$

kde  $\frac{1}{\sqrt{D}}$  je konstanta, kterou označíme  $c$ .

Odtud je možné vrátit se ke vztahu odvozenému výše v tomto důkazu a dojít k závěru, že hledanou křivkou je cykloida.

□

Řešení problému vedlo k potřebě řešit další úlohy podobného typu a k tzv. variačnímu počtu a hledání dalších obecných metod pro řešení optimalizačních úloh. (Tikhomirov, 1986)

## 4.5 Keplerovy vinné sudy a Fermatova metoda

V první polovině sedmnáctého století se Kepler snažil nalézt způsob, kterým by bylo možné určit rozměry vinného barelu o maximálním objemu při dané úhlopříčce. Motivací k vyřešení problému pro něj byla příhoda, kdy na svoji svatbu chtěl pořídit sud vína a prodejce v rakouském Linci určil objem sudu pomocí jediného měření. To Keplera zaujalo a cítil se být ošizený, protože si uvědomoval, že sud s malou podstavou a velkou výškou byl takto naměřen stejně jako sud s velkou podstavou. Objem by byl však zcela odlišný. (Toeplitz, 2007)

Kepler problém vyřešil a byl překvapen, že rakouské sudy měly rozměry velmi blízké maximálnímu objemu. Sám Kepler říká, že to působí, jakoby výrobci sudů byli vedeni prostým rozumem a geometrickou intuicí. Kepler dále dodává, že i pokud by se výrobci dopustili při výrobě určitých chyb v přesnosti, objem bude stále velice blízký maximálnímu objemu, neboť hodnoty v okolí maximální hodnoty se mění jen velmi málo. (Toeplitz, 2007; Tikhomirov, 1986)

*„V blízkosti maxima je úbytek na obou stranách z počátku jen nepatrný.“<sup>10</sup>*

Johannes Kepler (Tikhomirov, 1986, s. 53)

S rozvojem, který matematika zaznamenala díky Newtonovi, Leibnizovi a jejich současníkům, jako byli již zmínění bratři Bernoulliové, se objevila nová metoda řešení optimalizačních úloh, a sice derivace. Kepler však byl jedním z prvních, kdo si všímal spojitosti mezi maximem a směrem tečny. Toto pozorování bylo později formulováno Fermatem pro polynomy jako věta a později zobecněna právě Newtonem a Leibnizem na tzv. *Fermatovu větu*<sup>11</sup>. (Toeplitz, 2007; Tikhomirov, 1986)

<sup>10</sup>Není-li řečeno u cizojazyčných zdrojů jinak, jedná se o vlastní překlad.

<sup>11</sup>Je-li reálná funkce  $f(x)$  diferencovatelná na intervalu  $(a; b)$  a pokud má  $f(x)$  minimum nebo maximum v  $c \in (a; b)$ , potom je  $f'(c) = 0$ . (Monks, 2019)

Problémy se tak začaly převádět do jazyka funkcí a na hledání jejich extrémů. V kapitole popisující historii optimalizačních úloh je ovšem vidno, že dokud se problémy vyskytovaly spíše jednotlivě, nepoužívala se obecná metoda řešení, kterou by šlo uchopit více než nějaký subtyp úloh. Přestože některé z těchto přístupů jsou velmi zdlouhavé, často nabízejí pro žáka názornější vhled do problému. Některá z popsaných řešení také využívají metody, které je možné prezentovat žákům středních, ale někdy i základních škol – tedy dříve, než se s derivacemi, ale také funkcemi, setkají. Ve velkém množství úloh jsme využívali poznatků z geometrie, jelikož právě tam je pro člověka přirozené hledat to, co je nejkratší nebo nejdelší. To, že geometrický problém řešíme geometrickými metodami, nese samo o sobě zřejmá pozitiva pro žákovské poznání. Využitím geometrické metody jednak snížíme míru abstrakce ve srovnání s řešením funkčním, ale také řešení není tolik algoritmické. Následovat ve výuce historický vývoj však přináší i další výhody.

## 5 Paralela historického vývoje a výuky matematiky

„Myslím, že pokud chce člověk dosáhnout pokroku v matematice, měl by studovat mistry.“

Niels Henrik Abel (Fauvel, Maanen, 2002, s. 35)

Na zlomu devatenáctého a dvacátého století se stále častěji objevovaly názory, že historie matematiky by měla být součástí vzdělání učitelů matematiky. V té době se historii matematiky věnovalo značné množství matematiků a začala se objevovat první periodika věnující se právě tomuto tématu. Jako přínos seznámení se s historií matematiky uváděla, že se učitel i žáci zbaví dojmu, že matematické poznání bylo vždy pouze jedno a kolem matematických pravd nevznikaly pochyby a diskuse. Také se objevily názory, že znalost příběhů významných matematiků z odlišných kultur může mít motivační charakter. (Furinghetti, Radford, 2002)

S teorií darwinismu se změnilo postavení člověka v živé přírodě a s touto změnou přišla teorie tzv. *psychologické rekapitulace*. Ta ve zkratce říká, že žák při svém intelektuálním rozvoji přirozeně prochází stejnými stádii matematického (ale i jakéhokoliv jiného) porozumění a poznání, kterými procházelo v dějinách lidstvo. Tato psychologická teorie je založena na biologické teorii známé jako *Haeckelův zákon*. Zákon říká, že ontogeneze je zkrácenou fylogenezí (tedy, že vývoj jedince kopíruje vývoj druhu). Haeckel myšlenku později rozšířil i na psychický vývoj, kdy tvrdí, že vývoj dětské psychiky je zkráceným vývojem psychiky lidského druhu. (Olsson, Levit, Hoßfeld, 2017; Furinghetti, Radford, 2002; Hončíková, 2008)

Příkladem může být animistické myšlení, o kterém u dětí předškolního věku mluví Piaget. Dítě má tendence přisuzovat neživým věcem vlastnosti živých věcí a personifikovat je. Dalším příkladem může být artificialistické myšlení, které také



zmiňuje Piaget, když mluví o dětském přesvědčení, že vše má nějaký cíl a bylo někým vytvořeno. Tyto typy myšlení jsou typické i pro lidi v minulých fázích evolučního vývoje. (Olsson, Levit, Hoßfeld, 2017; Furinghetti, Radford, 2002; Hončíková, 2008)

Sám Piaget k *teorii rekapitulace* dodává, že paralelu mezi historií a vývojem jedince není dobré přeceňovat, přesto ale uznává, že v širším pohledu opravdu existují vývojové fáze, které jsou stejné. (Olsson, Levit, Hoßfeld, 2017; Furinghetti, Radford, 2002).

Podle Vygotského má na vztah mezi fylogenezí a ontogenezí vliv kultura, která určuje nejen to, jaké koncepty byly v minulosti ve vědě zkoumány, ale také jakými metodami byly problémy řešeny, či jaké nástroje (jazyk, slova, pomůcky, ...) byly použity. Těmito odlišnostmi se zabývá např. *etnomatematika*. (Ho, 2008)

Vzhledem k rostoucímu zájmu matematiků o historii v době, kdy se psychologové začali *rekapitulací* zabývat, netrvalo dlouho, než se objevily reakce matematiků. Jedním z prvních zastánců byl Poincaré. Podle něj je úkolem učitele žáka provést stejnou cestu, po které kráčeli před ním jeho předci. Říká, že je dobré některé pasáže projít rychle, ale žádnou nevynechat, a dodává, že historie vědy by měla být naším průvodcem v tom, odkud a kam ve výuce postupujeme. (Furinghetti, Radford, 2002)

V didaktice tak nalezneme znalost historie využití jak při plánování, tak při hledání aktivit, jejichž cílem je rozvinout či prohloubit žákovské poznání v dané problematice. (Furinghetti, Radford, 2002)

Jako zdroj problémů a příběhů, které mají potenciál učinit pro žáky matematiku zajímavou a zábavnou, historii označuje i Lockhart (2002), když kritizuje snahu učinit matematiku atraktivní umělými metodami. Za umělé metody považuje například snahu formulovat úlohy tak, aby byly pro žáky co nejvíce relevantní, nebo popisovaly každodenní zkušenosti. To má podle Lockharta (2002) negativní

následky, kdy úlohy naopak působí uměle, mnohdy postrádají smysl a jsou nepřírozané. Dodává, že matematiku není potřeba činit zajímavou, protože pro lidstvo je zajímavá od nepaměti a úlohy, které (jak na příkladu uvádí) přišly zajímavé Babyloňanům, budou připadat zajímavé i našim žákům.

O teorii rekapitulace se dále zmiňuje například také Klein:

*„... neboť žák musí přirozeně následovat stejný postup vývoje v menším měřítku, jaký následovala věda samotná v měřítku větším.“*

Felix Klein (Klein, 1986, s. 248)

Jiný přístup k výuce matematiky založený na historické posloupnosti problémů a příbězích slavných matematiků lze najít u Toeplitze (2007). Jeho metoda, kterou nazývá *genetický přístup* (genetic approach) a využil ji pro výklad matematické analýzy, je založena na myšlence, že namísto předávání hotových a pro studenty či žáky nudných faktů je potřeba, aby učitel vysvětlil, proč se jimi vůbec zabývat, co k tomu naše předky vedlo, jaké bádání těmto problémům předcházelo. Toeplitz a další zastánci *genetického přístupu* (např. Izvolsky, Pólya) dbají na to, aby student nebo žák rozuměl tomu, že se větou či problémem nezabývá jen proto, že je to přáním učitele nebo autora učebnice, se kterou pracuje. Izvolsky žáky vybízel k tomu, aby se pokusili představit si, kdy a jak daná věta či problém vznikl, a dodává, že i přesto, že z historického hlediska žakovské teorie nebyly správné, měl například v geometrii tento přístup pro žáky a jejich poznání hodnotu (uvědomili si, že i matematici se dopouštěli podobných chyb jako oni, nebo lépe chápali význam daných problémů). (Toeplitz, 2007; Furingetti, Radford, 2002)

Toeplitz se nesnažil žáky učit historii, ale využíval ji k hledání výukových aktivit a vhodné návaznosti učiva. Zároveň se jeho přístup liší od *rekapitulace*, protože

používá moderní značení a názvosloví, na rozdíl od původních matematiků, kteří problém řešili. (Toeplitz, 2007; Furingetti, Radford, 2002)

Furingetti a Radford (2002) dále dodávají, že je přirozené, že *genetický přístup* Toeplitz (2007) zvolil právě u matematické analýzy, kde je učivo obvykle řazeno v návaznosti vycházející z matematické logiky. Tato návaznost má podle nich své limity, jelikož koncepty jako limita, integrál či derivace zůstávají často na úrovni formálního a velmi abstraktního poznání.

Za *genetický přístup* ve výuce a kurikulu středních škol se postavila v memorandu vydaném v *The American Mathematical Monthly* (1962) celá řada předních matematiků té doby. Mezi nimi byli i didaktici a autoři učebnic matematiky jako Pólya, Kline nebo Courant. Memorandum bylo sepsáno jako reakce na krajní přístupy k výuce matematiky, které se začaly objevovat s rostoucím požadavkem na výuku mnohem většího množství matematických informací než dříve. V rámci těchto přístupů ke kurikulu buď v důsledku pedagogiky utrpěl obsah matematický, nebo naopak kvůli obsahu nefungovala pedagogická část výuky. Aby se žáci měli možnost seznámit s požadovanými tématy, byla snaha najít nejrůznější zkratky v tématech, které, jak se v memorandu píše, napáchaly více škody než užitku. Autoři proto sepsali sedm základních principů (jak je sami nazvali), podle nichž by se ke kurikulu na středních školách mělo přistupovat. Mezi nimi je jako pátý bod zmíněna právě *genetická metoda*. Autoři zmiňují fyziky Maxwella a Macha, kteří sami při výuce tuto metodu používali, a dále říkají:

„Nejlepším způsobem, jak usměrňovat mentální rozvoj jedince, je nechat ho zrekapitulovat mentální vývoj druhu. . . “

(Pólya, Kline, Courant, 1962, s. 190)

Význam znalosti motivace k řešení problému vyzdvihl také Leibnitz:

*„Není nic důležitějšího než znát původ objevu, ten je, podle mého názoru, zajímavější než samotný objev.“*

Gottfried Wilhelm Leibniz (Pólya, 1973, s. 123)

Autoři říkají, že tento princip je důležitým v následujícím případě. Přestože  $A$  implikuje  $B$  v nějakém logickém systému, stále je ospravedlnitelné ve výuce nejprve žáky seznámit s  $B$  a teprve potom s  $A$ , zejména tehdy, pokud  $B$  předchází  $A$  v historickém vývoji. Podobný výrok můžeme najít také u Pólyi:

*„Přijde-li v nesprávný čas nebo na nesprávném místě, může být dobrá logika největším nepřítelem dobrého vyučování.“*

George Pólya (Pólya, 1993, s. 286)

Ke *genetickému přístupu* dále autoři memoranda dodávají:

*„... můžeme očekávat větší míru úspěchu, budeme-li následovat podněty vyplývající z genetického principu, než při čistě formálním přístupu k matematice.“*

(Pólya, Kline, Courant, 1962, s. 191)

Na rostoucí zájem o využití historie matematiky ve výuce reagovala ICMI (The International Commission on Mathematical Instruction). V dokumentu Fauvel a Van Maanen (1997) vyzvali k diskusi tématu využití historie matematiky ve výuce. Z následné prezentace výsledků vyplynulo, že většina učitelů matematiky by ráda historii do hodin zapojila, ale nedělá to. Z rozhovorů s učiteli, které shrnují Furingetti a Radford (2002), lze dále vyčíst, že žáci se cítí mnohem lépe ohledně

vlastních obtíží s pochopením algebry, když jsou seznámeni s jejím dlouhým a složitým vývojem v historii. Stejně tak je pro žáka motivující, když vidí, že stejně jako on postupoval i matematik, který se problémem zabýval. To platí zejména pro chybování, kdy chyba přestává být banální, pokud se jí dopouštěli i slavní matematici. Žák pak i neúspěch může snáze vnímat jako krok správným směrem. (Furingetti, Radford, 2002)

Jones (1957) a Ho (2008) také mluví o funkcích, které historické prameny ve výuce mají. Shodují se v těchto bodech:

1. objasňují, dávají vhled, zlepšují porozumění matematice samotné,
2. žák cítí uznání k matematickému poznání, zlepšuje jeho vztah k předmětu,
3. slouží jako pedagogický nástroj sloužící učiteli ke zlepšení instrukcí a jejich hodin.

Za další přínos lze považovat provázanost na další předměty (jazyky, dějepis, ...) a filosofický a multikulturní podtext, který zkoumání historických zdrojů přináší.

V kapitole 4 je popsána stručná historie optimalizačních úloh tak, aby problémy bylo možné použít ke genetickému přístupu výuky optimalizace až po zavedení derivací. V následující kapitole jsou popsány některé metody řešení, které se postupně v ontogenezi problému vyskytly. Podle výše zmíněných autorů (Toeplitz, Pólya) je pro hlubší pochopení a motivaci žáků vhodné, aby (alepoň některé) metody popsané v kapitole 6 předcházely moderní metodě (v našem případě právě derivaci).

Tento přístup se může zdát zdoluhavý a poté, co žáci zjistí, jak většinu těchto úloh řešit algoritmicky, i zbytečný. Je proto dobré, aby i žáci věděli, proč se učili metody, které mohou působit jako překonané. To na přednášce poslucháčům vysvětloval Lagrange takto:

*„Přestože výpočet logaritmů je nyní věcí minulosti, až na ojedinělé případy, může se vám zdát, že details, do kterých zacházíme, postrádají hodnotu. Můžeme ovšem být právem zvědaví, jakými mučivými cestami se ubírali velcí objevitelé, jaké odlišné kroky zvolili k dosažení svého cíle a do jaké míry jsme dlužníky těmto přispěvatelům lidstvu. Navíc tato vědomost není pouhou věcí zvědavosti. Může nám nabídnout radu v podobných pátráních a osvětlit problém, který nás zaměstnává.“*

Joseph Louis Lagrange (Fauvel, Maanen, 2002, s. 35)

Mnoho důkazů v kapitole 4 je také časově náročných. Ale i samotné představení a žákovské bádání bez rigorózního důkazu může zlepšit následné porozumění žáka i jeho vzhledem do problému (například v oblasti isoperimetrického problému, kdy si žák sám uvědomí, že změna tvaru při zachování obvodu může měnit obsah).

## 6 Metody řešení optimalizačních úloh

V této kapitole jsou identifikovány a blíže popsány vybrané metody, které byly využity k řešení problémů popsaných v kapitole 4 (o historickém vývoji optimalizace). Následující podkapitoly se věnují zejména metodě řešení pomocí intuice a paralele s reálným, fyzickým světem.

Tyto přístupy, a jejich klady při využití ve výuce, jsou blíže popsány zejména proto, že se jedná o metody, se kterými se setkáváme, při chronologickém průchodu historií problému, mezi prvními. Ve školním prostředí mohou být však opomíjeny či dokonce považovány za přežité, což je v rozporu s doporučeními k následování historického vývoje při výuce, popsanými v kapitole 5.

Metody mají navíc své uplatnění i v dalších odvětvích matematiky, než jen u optimalizačních úloh. Autory, kteří je využívají napříč různými tématy, jsou například Toeplitz (2007) nebo Levi<sup>12</sup> (2009).

---

<sup>12</sup>Celá jeho kniha *The Mathematical Mechanic: Using Physical Reasoning to Solve Problems* je věnována řešení matematických problémů optikou fyzikálních zákonitostí.

## 6.1 Intuice

*„Soudím, že matematická intuice je vždy daleko napřed oproti logickému uvažování a pokrývá širší pole.“*

Felix Klein (Klein, 1986, s. 246)

Na začátku kapitoly 4 je zmíněno, že mnoho řešení optimalizačních úloh lze najít v přírodě. Co se živé přírody týče (např. včely a jejich plástve), vychází řešení často z instinktu, který je výsledkem evoluce druhu. Podobně, jak uvádí Niven (1981), bylo pro přežití člověka důležité hledání optima ještě před vznikem čísel. Optimum tak bylo hledáno na základě intuice. Ta hrála svoji roli i u řeckých matematiků, kteří dokázali popsat nejkratší spojnici mezi dvěma body v rovině i na sféře a mnoho dalších faktů a neviděli důvod k tomu je dokazovat, jelikož pro ně byly samozřejmé. Přestože jsme v kapitole 4 citovali Descartese, který říká, že na smysly a intuici není dobré se spoléhat a matematika dnes na důkazech stojí, v didaktice má intuice své místo. To říká například matematik Klein v reakci na výuku kolegů, kteří používali pouze logickou argumentaci a přísné důkazy. Tvrdí, že ve škole by měla intuice mít přednost a že právě historie matematiky nabízí dobrý kontext, který nám umožní intuici vrátit do výuky. Na příkladě Poincarého, nebo Kelvina, Klein uvádí, že i jejich myšlenky vzešly z dobré intuice (Klein má na mysli např. tzv. *Poincarého domněnku*). (Klein, 1986; Furinghetti, Radford, 2002)

Klein se také zamýšlel nad psychologií intuice. Ptal se, jaký vztah platí mezi procesy odehrávajícími se v mysli u logického uvažování a při použití matematické intuice. Podle Kleina mezi procesy existovat žádné spojení nemusí. Z jeho pozorování totiž vyplynulo, že se jedná o dvě různé myšlenkové aktivity, kdy intuici řadí blíže k nadání vizuálnímu a motorickému, zatímco logické uvažování blíže k nadání sluchovému. Sám ovšem dodává, že toto téma nebylo dobře popsáno a prozkoumáno. (Klein, 1986)



Jako příklad problému, který byl i v historii pravděpodobně řešen zpočátku intuicí, můžeme uvést *problém Dídó*. Ať už řešení problému jako první skutečně vyřešila mýtická fénická princezna, nebo autor básně, v obou případech není zmínky o tom, že by cokoliv dokazovali nebo počítali. V rozhovorech se žáky, popsanými dále, bylo ověřováno, zda jim fakt, že kruh má největší obsah při daném obvodu přijde také intuitivní. Také jsme zkoumali, jak to bude u pravoúhelníku, zda intuice bude fungovat i tam.

Na konci kapitoly 4.4 jsme naopak viděli příklad toho, kdy intuice při řešení optimalizačních úloh a problémů selhává. *Problém brachistochrony* byl řešen Galileem, který na základě intuicí zobecněných experimentů dospěl k závěru, že jde o část kružnice. I tento problém byl součástí rozhovorů se žáky.

## 6.2 Využití vlastností fyzického světa

*„To se tak stává, že jeden z největších matematických objevů všech dob byl veden fyzikální intuicí.“*

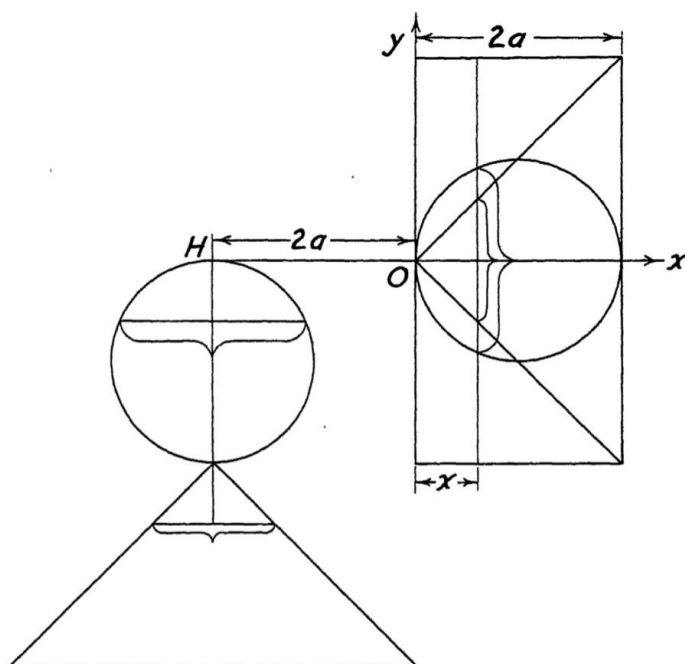
George Pólya (Pólya, 1954, s. 155)

V kapitole 4.1 je zmíněn Heronův přístup, kdy se úloha řeší pomocí paralely mezi fyzikálními vlastnostmi světla a geometrickým světem. V kapitole 4.4 byl využit *Snellův zákon* pro řešení *problému brachistochrony*. Opět tak byl použit fyzikální zákon k řešení matematického problému.

Pólya (1954) říká, že inspirace k řešení matematického problému v přírodě je velmi častá a že nám příroda nabízí vodítka a rady, které bychom jinak neviděli. Přístup, kdy je matematický problém řešen fyzikálními metodami, je možné najít v historii matematiky dále například u Archiméda, který pomocí páky a rovnováhy (obrázek 47 na straně 107) popsal vzhled koule, válce a kuželu ve třetím století před naším letopočtem. Dále takto našel obsah plochy pod částí paraboly a mnoho dalších vztahů. Archimédés tedy za užití mechaniky zkoumal problémy matematiky. (Pólya, 1954)

S podobným přístupem, kdy fyzika byla na počátku matematického objevu či důkazu, se lze setkat u Hamiltona, Riemanna, Lagrange, Jacobiho, Poincarého, Möbia, Newtona a dalších... (Levi, 2009)

Levi (2009) dodává, že tento přístup, který označuje jako heuristický, se s vývojem matematiky postupně vytratil, v důsledku čeho žáci neznají počátky matematických poznatků a nevědí, že jsou mnohdy také založeny na fyzikální intuici. Levi (2009) je toho názoru, že matematika a fyzika jsou tak provázány, že každá z věd bez té druhé bude ochuzena. Přestože se setkáváme zejména se vztahem opačným, kdy matematika slouží k popisu fyziky, má i zkoumání matematiky optikou fyziky velký přínos (jak bylo popsáno výše a bude popsáno dále).



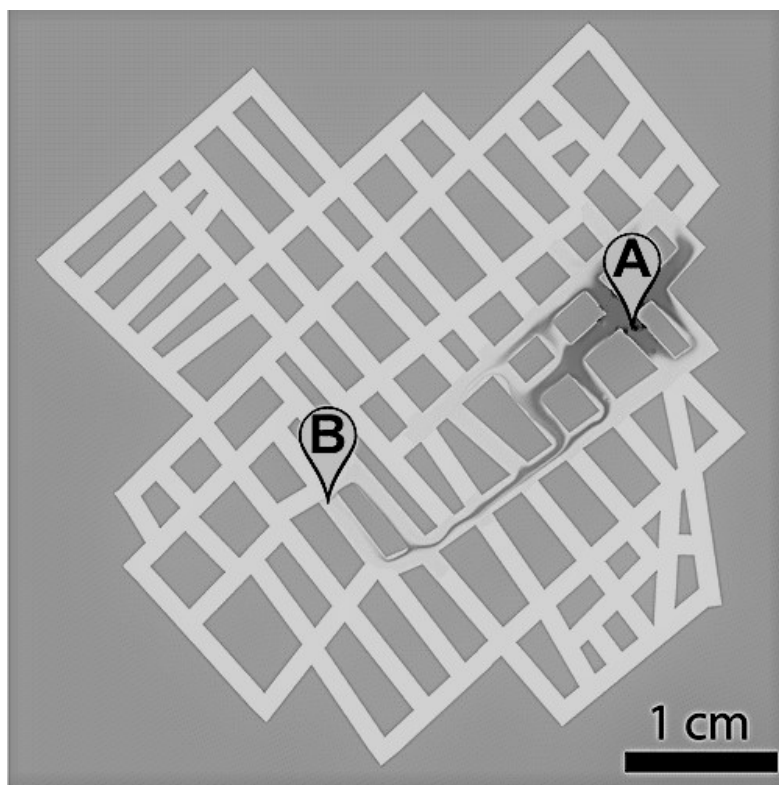
Obrázek 47: Archimédova metoda integrace (Pólya, 1954, s. 157)

Fyzikální demonstraci matematického jevu není sice možné považovat za matematický důkaz a postrádá obecnost. Přesto může ale sloužit jako dobrá ilustrace jevu, sloužit žákovi k samostatnému objevení nějakého jevu nebo získání vhledu do problému. Díky hlubšímu porozumění, které fyzikální experiment může poskytnout, může pro žáka být snazší pochopení abstraktního matematického popisu, jelikož už bude mít představu, co věta nebo problém říká, k jakému směřujeme výsledku a také pomůže při hledání důkazu. (Levi, 2009, Pólya 1954)

*„Fyzika nám (matematikům) dává nejen příležitost k řešení problémů, ale také nám pomáhá objevit metody, jak je řešit, a dělá to dvěma způsoby: vede nás k tomu, že očekáváme výsledek, a nabízí nám vhodné cesty argumentace.“*

Henri Poincaré (Pólya, 1954, s. 142)

Fyzikální experiment může sloužit i k vyřešení problému, který by matematickými metodami pro žáka mohl být neřešitelný nebo nezajímavý, a také jako motivační úloha do dané problematiky. Příkladem takové úlohy, ve které je možné využít fyziky a dokonce i chemie, může být hledání nejkratší cesty v bludišti, kde existuje více cest do cíle. Způsob řešení je popsán v (Suzuno et al., 2014), kde autoři využívají tzv. *Marangoniho efektu*, v jehož důsledku částice barviva putují bludištěm zaplněným alkalickým roztokem mastné kyseliny do cíle, v němž je kapka hydrochlorické kyseliny (viz obrázek 48). Výhodou metody může být také to, že částice barviva postupem času znázorní i druhou (případně další) nejrychlejší cestu do cíle.



Obrázek 48: Použití *Marangoniho efektu* k nalezení nejkratší cesty mezi dvěma body v modelu ulic centra Budapešti (Suzuno et al., 2014, s. 9254)

### 6.3 Další často používané metody

V kapitole 4 jsme se na více místech setkali s řešeními pomocí nerovností.

Při řešení *problému Dídó* bylo použito přístupu, který zmiňuje Pólya (1973), a sice prvotního vyřešení souvisejícího problému a snížení počtu podmínek na hledaný objekt.

V případě optimalizačních problémů, kde k nalezení řešení stačí vyzkoušet konečný počet možností, může dále pomoci například tabulka.

## 7 Rozhovory se žáky na téma optimalizační úlohy

Vzhledem k tomu, že se v kurikulu základních a středních škol optimalizačním úlohám nevěnuje příliš času a obvykle se objevují jen nahodile, rozhodl jsem se prozkoumat úroveň žákovského porozumění jevům, které s řešením takových úloh souvisí nebo jsou předpokladem k jejich porozumění (jako například vztah mezi obvodem a obsahem sloužící k úspěšnému porozumění isoperimetrickým úlohám). Také mě zajímalo, jaká bude zpětná vazba žáků na řešení pomocí fyziky a jakým způsobem přistoupí k řešení úloh, se kterými nemají tolik zkušeností.

V kapitolách 7.1 a 7.2 je popsán výzkumný vzorek, výzkumný nástroj a otázky, které žáci měli za úkol řešit. U otázek je popsáno možné řešení daného problému nebo odkaz na řešení popsané v některé z předcházejících kapitol.

Kapitola 7.3 obsahuje vyhodnocení a analýzu odpovědí, nápadů a řešení žáků pro každou otázku, která byla v rámci rozhovorů se žáky řešena. V kapitole také zmiňuji možné příčiny, které mohly vést k některým chybám žáků, a další postřehy k rozhovorům se žáky.

## 7.1 Výzkumný nástroj a výzkumný vzorek

Jako výzkumný nástroj jsem zvolil polostrukturovaný rozhovor vycházející z otázek popsanych v kapitole 7.2. Některé z jevů jsem měl také možnost zařadit do hodin matematiky a fyziky na druhém stupni základní školy.

Rozhovory probíhaly jako dialog mezi žákem a mnou. Část rozhovorů byla vedena naživo. Další část rozhovorů proběhla v online prostředí za nastavení co nejpodobnějších podmínek živému rozhovoru.

Délka rozhovorů se pohybovala mezi třiceti minutami až jednou hodinou v závislosti na stupni školy navštěvované žákem a nápadech žáka. Některé otázky byly na základní škole vynechány a pozornost žáků na druhém stupni byla po třiceti minutách již značně nižší, než u žáků střední školy.

Rozhovor jsem měl možnost vést se žáky druhého stupně základní školy, žáky střední školy (kteří neznali pojem derivace) i několika maturanty z matematiky, kteří ze školy znali derivace a pracovali s nimi i při řešení optimalizačních úloh. Počet žáků<sup>13</sup> základní školy, se kterými jsem rozhovor vedl, byl osm, žáků střední školy bylo pět a maturanti čtyři.

Výběr žáků na základní škole byl založený zejména na jejich kladném vztahu k matematice a úrovni matematických znalostí, kterou jsem posuzoval podle jejich práce v mých hodinách matematiky, ale také fyziky. Středoškoláci byli vybráni na základě jejich studijních výsledků a ochoty zúčastnit se rozhovoru, a také podle toho, zda byli přihlášení k maturitní zkoušce z matematiky nebo ji již absolvovali (přesto, když nebude řečeno jinak, jsou dále považováni za žáky střední školy).

---

<sup>13</sup>Není-li ve vyhodnocení otázky uveden jiný počet.

## 7.2 Popis otázek

Otázky jsem vybíral primárně podle metod řešení optimalizačních úloh (popsaných v kapitole 6), které vycházejí z historie optimalizace.

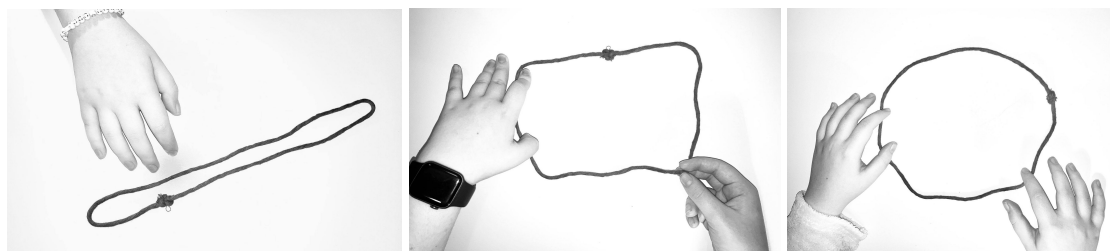
### 7.2.1 Otázky řešené intuitivně

Žákovskou intuici jsem zkoumal na trojici úloh. Vždy jsem zjišťoval, zda se žáci s konkrétní úlohou již nesetkali a neznají tak její řešení.

#### 1) Namodeluj z daného provázku rovinný útvar, jehož obsah bude maximální.

V první otázce měli žáci za úkol sestrojit model dvourozměrného útvaru pomocí provázku, jehož konce byly svázané k sobě (viz obrázek 49). Podmínka, kterou jsem na útvar, jehož hranici tvořil provázek, kladl, byla, aby měl co největší obsah (viz kapitola 4.3.2 o *problému princezny Dídó*).

Žáci byli v rámci rozhovoru obeznámeni s příběhem, který Vergilius popisuje v *Aeneis*, a problémem, který musela fénická princezna vyřešit. Rozdílem však bylo, že jsme v úloze vynechali pobřeží, které tvořilo část obvodu v *problému Dídó*.



Obrázek 49: Trojice častých řešení žáků



## 2) Najdi maximální pravoúhelník a trojúhelník při daném obvodu.

Otázku jsem střídal ve dvou variantách. Jednou jsem se žáků nejprve ptal, jaký bude maximální pravoúhelník při daném obvodu, podruhé jaký bude maximální trojúhelník. Žáci měli možnost i při druhé otázce pracovat s provázkem a útvary si modelovat. Na otázku jsem v některých případech navázal dotazem, zda bude větší obsah při stejném obvodu mít rovnostranný trojúhelník, nebo čtverec (viz definice 13 a související text o isoperimetrickém kvocientu).

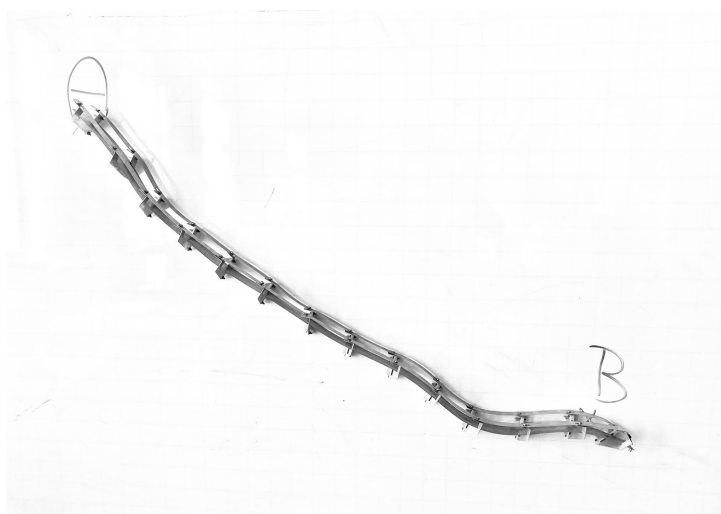
## 3) Najdi dráhu, po které se kulička dostane z bodu $A$ do bodu $B$ za nejkratší čas.

Otázka třetí se týkala *brachistochrony* (viz kapitola 4.4). Žáci měli za úkol namodelovat dráhu pro kuličku tak, aby se z bodu  $A$  do bodu  $B$  dostala za co nejkratší čas. Jako model jsme použili magnetickou dráhu na tabuli (viz obrázek 50 na straně 114). Ta nemohla být součástí online rozhovorů a žáci tak buď žádný model nevyužívali, nebo používali tvrdý papír, který prohýbali.

Přestože by otázka mohla spadat mezi otázky řešené fyzikálním experimentem, řešení jsme hledali pouze intuitivně za podpory modelu k vyloučení některých žakovských hypotéz.

### 7.2.2 Otázky řešené fyzikálním experimentem

Fyzikální přístup k řešení matematického problému je možné využít i u některých dalších problémů optimalizace z kapitoly 4. Pro rozhovor se žáky byl vybrán *Steinerův problém* (viz kapitola 4.2.3). Záměrně jsem vybral problém geometrický. Levi (2009) totiž zmiňuje, že geometrická představivost spolu s „fyzikální mechanickou intuicí“, které jsou podle něj součástí lidského intelektu, tvoří ve společné



Obrázek 50: Magnetická dráha, se kterou žáci pracovali

kombinaci podle něj velmi mocný nástroj k řešení problémů, neboť mechaniku lze považovat za geometrii zaměřenou na pohyb a dotyk. Toto zaměření žákům dává další možnost vnímání problému (multisenzorické učení).

Výběr této úlohy vychází také z toho, že je možné řešit ji více fyzikálními přístupy. Vybral jsem dva, které jsou dále popsány:

1. přístup využívající závaží,
2. přístup využívající mýdlové bubliny.

V prvním přístupu nalezneme bod, pro který platí, že součet vzdáleností mezi ním a každým z vrcholů je minimální, tak, že svážeme tři provázky k sobě v jednom bodě a na volné konce navážeme závaží o stejné hmotnosti. Následně tuto soustavu provázků a závažíček navlékneme na trojúhelník, v jehož vrcholech jsou umístěny osy, po kterých bude provázek volně klouzat (viz obrázek 51 na straně 115).

**Pozn. 20.** Čím menšího tření mezi provázkem a osou ve vrcholu dosáhneme, tím lépe bude experiment fungovat – vhodné je do vrcholů umístit například kladky.



Obrázek 51: Toricelliho bod nalezený fyzikálním experimentem

**Pozn. 21.** V experimentu je třeba zanedbat tření, hmotnosti provázků, pružnost provázků a velikost os ve vrcholech (bereme jako body). (Pólya, 1954)

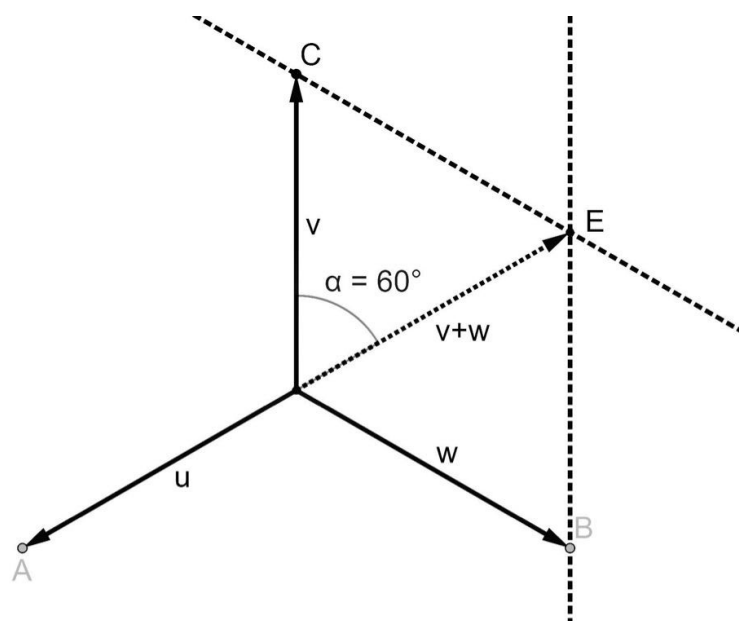
Na obrázku 51 je trojúhelník tvořen třemi špendlíky a *Toricelliho bod* leží v místě, kde je uzel spojující trojici provázků. Se žáky je možné přeměřit také to, že úhel mezi každou odpovídající dvojicí provázků je  $120^\circ$ .

Fyzikální vysvětlení toho, proč experiment funguje a jedná se o *Toricelliho bod*, lze najít například u Pólyi (1954). Problém rozdělíme na dvě části, nejprve ukážeme, že bod, ve kterém se nachází uzel, má požadovanou vlastnost minima, ve druhé části ukážeme jiným fyzikálním přístupem, že úhly mezi provázky jsou skutečně  $120^\circ$ :

1. Závaží mají snahu mít co nejnižší polohovou (potenciální) energii, proto musí viset co nejnižší nad zemí. Součet vzdáleností mezi závažíčky a zemí je tedy minimální. Proto musí být maximální součet vzdáleností mezi „špendlíkem“ (vrcholem) a závažíčkem. Protože části provázku mezi „špendlíkem“ a závaží jsou maximální a délka všech tří provázků dohromady je konstantní, musí být délka provázku mezi uzlem a „špendlíky“ (vrcholy) minimální. (Pólya, 1954)
2. Protože se „uzel“ nehýbe a je v klidu, musí síly, které na něj působí, být v rovnováze (*Newtonovy zákony*). Stejně hmotná závaží působí shodnou silou ( $F = mg$ , kde  $m$  je hmotnost závaží a  $g$  gravitační zrychlení) na provázek, na kterém jsou zavěšena. Tato síla se přenáší do jiného směru ve vrcholech a „tahá“ za uzel (velikost se nezmění, zanedbáváme tření). Uzel lze považovat za působíště těchto sil, které jsou v rovnováze.

Protože jsou síly v rovnováze, musí platit, že součet libovolných dvou vektorů síly je opačný ke třetímu. Pro ilustraci se budeme odvolávat na obrázek 52 na straně 117. Sečteme-li například dvojici vektorů  $v$  a  $w$ , dostaneme vektor  $v + w$ , který je opačný k vektoru  $u$ , ale má stejnou velikost. Platí tedy, že  $v$ ,  $v + w$  i úsečka  $CE$  mají stejnou velikost. Trojúhelník jimi tvořený je tedy rovnostranný. Obdobně argumentujeme pro trojúhelník tvořený vektory  $v + w$ ,  $w$  a úsečkou  $BE$ . Vektory  $v$  a  $w$  tak svírají úhel  $120^\circ$ . Ze symetrie soustavy vektorů pak platí, že každá dvojice vektorů svírá  $120^\circ$ . (Pólya, 1954)

Stejný problém je možné řešit také metodou „mýdlové blány“. Courant a Robbins (1996) popisují řadu matematických experimentů využívajících vlastností mýdlových blan. Při minimalizaci vycházejí z vlastnosti, kdy povrchové napětí mýdlové blány je ve stabilní rovnovážné poloze, pokud je plocha této blány minimální

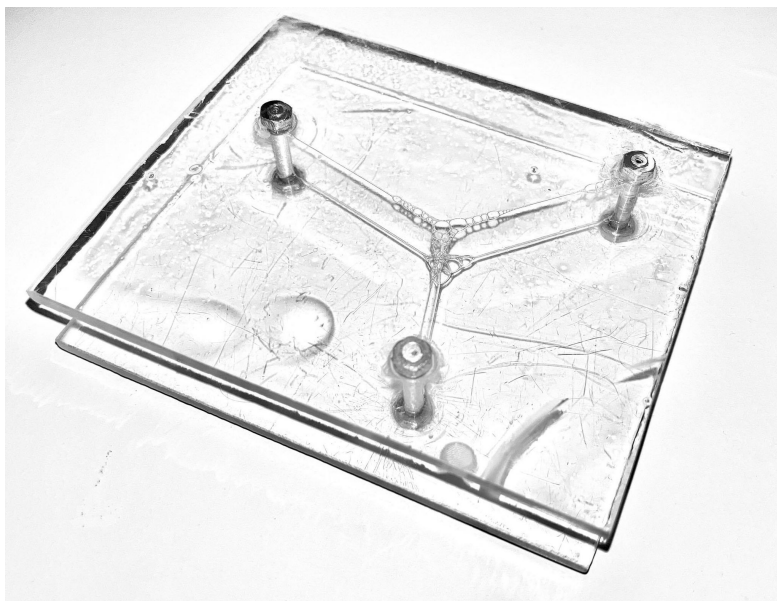


Obrázek 52: Rovnováha sil

(proto například bubliny z bublifuku mají tvar koule – minimální povrch pro daný objem vzduchu). Tato metoda je ideální k řešení *Steinerova problému* (hledání *Toricelliho bodu*) i jeho složitějších verzí, kdy počet bodů, mezi kterými budeme cesty konstruovat, bude větší než tři.

K využití této metody je potřeba pomůcka (viz obrázek 53 na straně 118) skládající se ze dvou rovnoběžných průhledných destiček, které jsou připojeny k těmto destičkám kolmými tyčkami (v našem případě šrouby) v počtu, který odpovídá množství bodů, mezi kterými hledáme minimální cestu (model na obrázku 53 slouží k řešení případu pro tři body).

Pomůcka se používá tak, že ji celou ponoříme do mýdlové vody a po jejím vytažení se mezi destičkami a šrouby vytvoří mýdlové blány. Ty se snaží zaujmout energeticky nejoptimálnější polohu, ve které se ustálí. V pohledu shora tak máme řešení dvojrozměrného *Steinerova problému* s *Toricelliho bodem* v místě, kde se blány setkávají.



Obrázek 53: *Toricelliho bod* jako výsledek mýdlového experimentu

V této oblasti jsem zvolil více přístupů. V prvním jsem žákům zadal matematický problém a nechal je pracovat s pomůckami, pomocí kterých mohou nahlédnout jeho řešení.

V pozdějších rozhovorech jsem zvolil přístup, kdy jsem žáky seznámil s příběhem tří měst, která chtějí postavit co nejlevněji silnici, a příběhem aerolinek a spojovací společnosti (viz závěr kapitoly 4.2.3). Teprve následně měl žák problém začít řešit. Nejprve bez využití pomůcek. Až následně jsme se začali zabývat fyzikálními pokusy.

Jindy jsem volil postup zcela opačný (zejména v online hodinách, kdy pokus nebylo možné provádět žákem), kdy žáci viděli provedení pokusu a měli určit, jakou vlastnost by bod, který v experimentu vznikne, měl mít.

### 7.2.3 Otázka řešená užitím nerovnosti

Se žáky střední školy jsme pracovali s nerovností u úlohy, kdy měli dokázat, že největším pravoúhelníkem s daným obvodem je čtverec. Společně jsme odvodili větu 5 a nerovnost měli žáci za úkol využít k důkazu.

Důkaz je možno vést například tak, že strany obdélníku označíme  $a$  a  $b$ . Obvod tohoto obdélníku je tedy  $o = 2a + 2b$  a jeho obsah  $S = ab$ . Protože čtverec má stejný obvod jako obdélník, bude délka jeho  $c$  strany, vyjádřená pomocí délek stran obdélníku, rovna  $c = \frac{a+b}{2}$ . Obsah čtverce je tak roven  $A = \frac{(a+b)^2}{4}$ . Chceme ukázat platnost tvrzení:

$$ab \leq \frac{(a+b)^2}{4}.$$

Nerovnost upravíme do tvaru:

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2},$$

o kterém víme, že platí podle věty 5. Obsah obdélníku je tedy menší, než obsah čtverce (rovnost nastane pouze v případě, že  $a = b$ , tedy pro čtverec).

### 7.2.4 Úloha s konečně mnoha možnostmi řešení

Použití tabulky k systematickému zápisu, či preferenci jiné metody, u problému, kde stačí vyzkoušet konečný počet možností k nalezení optima, jsem pak sledoval v této úloze s pohybem po schodišti, která je převzata z (Hejný, 2019, s. 1): „*Irena stojí na schodu 5, Kamila na schodu 10 a Juraj na schodu 15. Kamila a Irena chodí po jednom schodu, Juraj po dvou (počítáme však jako jeden krok). Nejdříve Irena udělá několik pohybů, pak Juraj a nakonec Kamila. Všichni se setkají na stejném schodu. Nejméně kolik pohybů museli všichni dohromady udělat?*“

Zajímalo mě, jakým způsobem žáci přistoupí k tomu, že se po schodech pohybují tři děti a na první pohled existuje velké množství pohybů, které je možné provést. Také mě zajímalo, jak problémové pro žáky bude vyloučit možnosti, kdy

by se Irena pohybovala směrem dolů a Juraj směrem nahoru, jak žák situaci graficky znázorní a jaký systém zvolí, aby měl jistotu, že odpověď je skutečně správná. Dále jsem se zaměřil na to, zda věta: „Nejdříve Irena udělá několik pohybů, pak Juraj a nakonec Kamila.“ bude pro žáky mít nějaký význam a i při řešení budou žáci dětmi po schodech „hýbat“ v tomto pořadí.

Možné řešení úlohy je zachyceno v tabulce 2. V prvním řádku tabulky jsou zachyceny některé schody, na které se Juraj (J) může dostat, a v závorce počet jeho kroků, které k dosažení daného schodu musí provést. V dalších dvou řádcích je dopočítáno, kolik kroků musí vykonat Irena (I) a kolik Kamila (K), aby se dostaly na stejný schod, na kterém stojí Juraj. Z posledního řádku tabulky, kde je zanesen součet kroků všech dětí, je zřejmé, že minimem kroků je osm a děti se sejdou na devátém schodě (řešení je znázorněno tučně). Také je vidět, že čím dál od devátého schodu Juraj bude, tím více kroků děti budou muset vykonat, a tedy nemusíme zkoušet další možnosti.

Tabulka 2: Možné řešení úlohy o schodech

Schody dostupné J (počet kroků)	15 (0)	13 (1)	11 (2)	<b>9 (3)</b>	7 (4)	5 (5)
Počet kroků I, aby se dostala k J	10	8	6	<b>4</b>	2	0
Počet kroků K, aby se dostala k J	5	3	1	<b>1</b>	3	5
Součet kroků všech tří dětí:	15	12	9	<b>8</b>	9	10



## 7.3 Vyhodnocení rozhovorů se žáky

V této kapitole jsou shrnuty přístupy žáků k řešení úloh popsanych v kapitole 7.2, žákovské obtíže při řešení těchto úloh, některé reakce žáků a miskoncepty, které jsem v rozhovorech postřehl.

### 7.3.1 Hledání řešení problému Dídó

Před samotným provedením rozhovorů jsem očekával, že žáci správně odpoví, že řešením je kruh, ale bude pro ně těžké odpověď podpořit nějakými argumenty. To se v mém vzorku žáků potvrdilo a odpověď, že řešením by mohl být kruh, byla alespoň zmíněna ve všech případech. Přitom žádný z žáků, se kterými jsou rozhovor vedl, úlohu neznal ani se s ní dříve, podle vlastních slov, nesetkal.

V žákovských řešeních první otázky (*problém Dídó*), která jsem měl možnost pozorovat, bylo dále možné vypořádat několik často se opakujících jevů:

1. Někteří žáci nejprve tvrdili, že jelikož je obvod konstantní, nezáleží na tvaru a úloha je „chyták“. Tento názor se objevil u čtyř žáků základní školy, ale také u čtyř žáků střední školy. Tuto domněnku jsem se pokusil žákům následně narušit na příkladu obdélníku s délkami  $a = 8$ ,  $b = 2$  a čtverci o straně  $c = 5$ .
2. Ve dvou případech žáci střední školy trvali na svém a říkali, že na tvaru přeci skutečně nezáleží, protože na tom nezáleží ani u trojúhelníku, kde mohou vrcholem pohybovat jak chtějí (opomněli zmínit, že po rovnoběžce s protější stranou, a také si neuvědomili fakt, že obvod se mění) a obsah je stejný.
3. Žáci se snažili smyčku co nejvíce natáhnout jedním směrem (v důsledku čehož se výška obrazce postupně zmenšovala k nule). Toto řešení se vyskytovalo pouze na základní škole (ve třech případech), kde žáci také více pracovali s provázkem. Žáci střední školy úlohu řešili bez využití provázku (ač jej měli

k dispozici), ojediněle (ve dvou případech) namodelovali pouze finální odpověď, ale nezkoušeli různé útvary modelovat a nějak porovnávat. Proto se u středoškoláků toto řešení nevyskytlo.

Jen v jednom případě žák základní školy toto řešení po namodelování sám zamítl. K odůvodnění použil znalost o obsahu obdélníku, když řekl: „Jedna strana obdélníku by byla nula, takže obsah taky.“

4. Žáci jako možnost zmínili nebo z provázku tvořili čtverec. Tuto možnost nakonec alespoň zvážilo šest žáků ze základní a sedm žáků ze střední školy.
5. Žáci jako možnost zmínili nebo z provázku tvořili kruh. Tato možnost zazněla u sedmi žáků ze základní a všech devíti žáků ze střední školy.

Ze žakovských odpovědí bylo vidět, že pro ně byl vztah mezi obvodem a obsahem mnohdy nesprávně pochopený. Žáků jsem se proto dále ptal, které z následujících tvrzení je pravdivé:

1. Když mají dvě tělesa stejný obvod, mají stejný obsah.
2. Když mají dvě tělesa stejný obsah, mají stejný obvod.

Pro žáky bylo až překvapivě složité na otázky odpovědět a obvykle pouze hádali, namísto toho, aby si například zkusili vymyslet protipříklad. To se objevilo jen u tří středoškoláků. Tři žáci základní školy dále také tvrdili, že je možné útvary, které mají stejný obvod, rozstříhat a přeskládat jeden na druhý, že to dělali ve škole. Ujišťoval jsem se, zda si pouze nepletou pojem obvod a obsah, ale žáci byli přesvědčeni, že by to šlo u obojího.

Odpověď kruh a čtverec nakonec ale zazněla ve většině případů (čtverec s menší četností). Ptal jsem se žáků, proč si myslí, že je napadly právě tyto útvary. Na to buď odpovědět nedokázali, nebo tvrdili, že proto, že jsou to „hezké útvary“, jsou

pravidelné a obvykle je to správná odpověď, protože mají speciální vlastnosti. Také zazněly argumenty typu: „Šipky vycházející ze středu kruhu tlačí všude stejně silně, ale u čtverce ne, takže to je kružnice.“ Tento výrok na mě působil již jakousi snahou vnést do problému nějakou fyzikální interpretaci. Od dvou žáků střední školy také zazněl správný argument, že útvar musí být konvexní. Jeden ze žáků to uváděl na příkladu tvaru „hvězdy“, kdy by ji bylo možné podle jeho slov vždy „zvětšit do stran na kruh“.

Pokud bychom o intuici smýšleli jako o zautomatizované zkušenosti s úlohami podobného typu, pak by nefungovala správně v argumentu využívajícím vlastnosti trojúhelníku a vrcholu pohybujícího se po rovnoběžce s protilehlou stranou, neboť žáka zavedla ke špatnému závěru. Může ale také jít o důsledek nesprávného pochopení vztahu pro trojúhelník, neboť žáci v tomto případě opomněli fakt, že je potřeba pohybovat se po rovnoběžce, i to, že obvod se mění.

I při natažení smyčky mohla intuice žáka zavést špatným směrem. Ze zkušenosti věděl, že čím větším číslem násobíme, tím větší nám vyjde výsledek, ovšem neuvědomil si pravděpodobně fakt, že s nárůstem velikosti v jednom směru se zmenšuje výška obrazce ve směru druhém. Zaujalo mě také to, že smyčku dva žáci základní školy utáhli „na prsty“ a více ji už neztlačovali. Možná i jim samotným v tu chvíli došlo, že se obsah přibližuje k nule, a proto ustali. Když jsem se na to těchto dvou žáků ptal, první pojal podezření, že se ptám proto, že je to chybně, a řešení změnil bez odpovědi. Druhý žák na tom však trval. Zeptal jsem se ho tedy, co by se stalo, kdyby smyčku natáhl ještě více. Odpověděl, že by byl obrazec na jednu stranu sice velice nízký, ale na druhou nejdelší, co může být, a tak i obsah musí být největší.

Všichni žáci ale dříve nebo později sestrojili kruh nebo čtverec. I žáci, kteří nejprve trvali na tom, že na tvaru nezáleží, nebo se smyčku snažili napínat do stran, po vyloučení těchto možností protipříkladem nebo vysvětlením přešli k útvarům

pravidelným – konkrétně čtverci a kruhu (jiný pravidelný útvar se v mém pozorování u této otázky nevyskytl).

Protože někteří žáci čtvercem nebo kružnicí začali (kruh jako první zvolilo osm žáků a čtverec dva žáci aniž by úlohu dříve řešili), je opravdu možné, že za jejich řešením stojí intuice. Přestože čtverec není řešením, jedná se o maximální pravoúhleník daného obvodu, a tedy žáci, kteří zvolili tento přístup, mířili správným směrem. Žáci, kteří vybrali kruh po chvílce začli uvažovat nad čtvercem a stejně tak opačně, žáci kteří volili čtverec přemýšleli a později se přiklonili ke kruhu.

Zaujalo mě, že po skončení rozhovoru, kdy jsem žáky obeznámil se správnou odpovědí, i žáci, kteří řešení *problému Dídó* nejprve sami neodhadli správně a nebo ano, ale odpověď neměli nijak podloženou, reagovali tak, že je to vlastně úplně jasné. Dokonce souhlasili i přesto, že jsem nijak nevysvětlil, proč tomu tak je, a reagovali stylem: „Ajó vlastně, to je jasné, jen mě to nenapadlo“.

### 7.3.2 Hledání maximálního pravoúhelníku a trojúhelníku při daném obvodu

Ve druhé otázce bylo nejprve nutné společně si objasnit pojem pravoúhelník. Žáci se s termínem nesetkali (všichni žáci na základní a tři žáci na střední škole), ale dokázali sami velmi rychle a správně odhadnout, jaké útvary termín popisuje. Úlohu o pravoúhelníku i její řešení maturanti z matematiky ve třech případech znali, proto jsme společně řešili pouze trojúhelník, kde si odpověď žáci nepamatovali. Ostatní se s podobnou úlohou podle svých slov nesetkali.

Nejprve jsem úlohy řadil tak, že jsme se zabývali pravoúhelníkem a teprve potom trojúhelníkem. Takto jsem pracoval se třemi žáky základní a dvěma žáky střední školy. Ti žáci, kteří odpověděli správně na *problém Dídó* a vybírali pouze mezi čtvercem a kruhem, neměli problém přijít u pravoúhelníku na čtverec okamžitě (již věděli, že kruh byl správnou odpovědí první otázky). Objevovaly se zde

ale také podobné odpovědi jako při první otázce. Například jsem se ve dvou případech opět setkal se snahou o to obdélník co nejvíce natáhnout. Přesto byl nakonec čtverec vybrán jako správná odpověď u všech.

To může být ale také způsobeno tím, že počet možných odpovědí byl v podstatě mnohem menší (ač obdélníků na výběr bylo nekonečné množství) a jen jedna působila „speciálně“ – čtverec.

Pokud následovala stejná otázka o trojúhelnících, již obvykle nebyl problém vybrat trojúhelník rovnostranný. Pokud však otázky byly v opačném pořadí (tedy v pořadí, kdy jsme se zabývali nejprve trojúhelníkem a teprve potom pravoúhelníkem), i žáci, kteří vybrali v první otázce jako správné řešení kruh, měli s trojúhelníkem problém. Například u dvou žáků střední školy se objevila snaha použít vědomost, kterou mají o trojúhelníku (pokud přesuneme vrchol trojúhelníku po přímce rovnoběžné s protilehlou stranou, obsah se nezmění, neboť neměníme výšku ani podstavu trojúhelníku) a zobecnit ji na každý tvar (opět opomněli podmínku kladenou na délku obvodu).

Setkal jsem se také s řešeními, která označovala za maximální trojúhelník pro daný obvod trojúhelník pravoúhlý (ve třech případech) nebo rovnoramenný (ve dvou). Žáci měli tendenci vybírat speciální typy trojúhelníku (pravděpodobně z předchozí zkušenosti, kdy právě tyto trojúhelníky jsou nositeli důležitých vlastností, se kterými se ve škole setkávají). Po vyřešení trojúhelníku už pro žádného z žáků nebyl problém odpovědět, jak to bude s pravoúhelníkem.

Úspěšnost v případě, kdy jsme se dříve zabývali trojúhelníkem, tak byla nižší, než když jsme se nejprve zabývali pravoúhelníkem. To opět může být zapříčiněno pouze tím, že nyní žáci vybírali „ze tří možností“ – rovnoramenný, pravoúhlý, rovnostranný.

Žáci i u této otázky své odpovědi opírali o argumenty jako: „Je to hezký útvar a ,ty prostě fungují‘.“

Otázkou tedy je, nakolik se jednalo o odhad a nakolik o intuici a zda je mezi nimi vůbec rozdíl. Pokud odpovědi žáků ale budeme považovat za vycházející z intuice, pak v mém pozorování nejlépe fungovala u pravoúhelníku, poté kruhu a o něco hůře u trojúhelníku. Postřehl jsem také, že v této otázce pracovalo s provázkem méně žáků než v první.

V osmi případech si žáci, i z pouhých dvou případů, sami všimli, že řešeními jsou pravidelné mnohoúhelníky. Tyto žáky jsem nechal ještě určit, zda větší obsah bude mít čtverec, nebo rovnostranný trojúhelník. Překvapilo mě, že v šesti případech žáci zvolili správnou možnost. Tři také zmínili, že je to proto, že: „Čtverec má blíže ke kružnici než trojúhelník.“

### 7.3.3 Hledání brachistochrony

Řešení, která jsem u této otázky očekával, byla parabola a část kružnice, která se objevila v řešení úlohy Galileem. Neočekával jsem však, že žáci na řešení skutečně přijdou, už proto, že většina z nich cykloidu nebude ani znát. Tím se otázka liší od prvních dvou, kdy žáci měli možnost odhadnout řešení správné. Zde jsem očekával řešení chybná a sledoval, zda opět bude tendence vybírat křivky pro žáky význačné, i to, zda si žáci uvědomí složitost problému ve srovnání s prvními dvěma úlohami.

Žádný z žáků se s úlohou tohoto typu nesetkal, pouze se tři žáci zmínili, že podobné úlohy řešili ve fyzice, ale nakonec se ukázalo, že žáci měli na mysli úlohy, kdy se jednalo o výpočet rychlosti v nejnižším bodě křivky a hledání křivky, kde tato rychlost bude maximální, nikoliv o minimalizaci času pohybu po křivce.

Z řešení žáků, se kterými jsem měl možnost pracovat, bylo možné vyzorovat několik jevů, které se opakovaly při hledání *brachistochrony* častěji:

1. Pro některé žáky bylo nejprve těžké přijmout, že řešením není úsečka, když je to nejkratší vzdálenost. To zejména platilo pro žáky základní školy, kdy úsečku označili za správné řešení čtyři žáci. Žáci střední školy často přímku

sami nejprve vyloučili, ale také je v pěti případech napadla jako první z variant, kterou se zabývat.

2. Tři žáci z osmého ročníku a také čtyři žáci ze střední školy neodlišovali případy, kdy má kulička urazit dráhu v co nejkratším čase a kdy má mít kulička maximální okamžitou rychlost v bodě  $B$ . Toto zmatení si alespoň u žáků základní školy vysvětlují tím, že žáci právě probírali *zákon zachování mechanické energie* a podobné úlohy řešili. Věděli tak, že nezáleží na tvaru trajektorie, pokud nám jde o maximální okamžitou rychlost v cíli, a tuto odpověď volili. Další příčinou může být fakt, že se žáci s takovou úlohou ještě nesetkali, a tak se jim dva (na první pohled podobné) problémy jevily být stejné.
3. Po sérii pokusů a objasnění některých nejasností se u žádného žáka neobjevilo řešení, které by bylo mezi  $A$  a  $B$  konkávní. S pomůckou bylo obtížné manipulovat, ale žáci měli tendenci dráhu tvarovat konvexně. Ani při práci bez pomůcek se konkávní řešení neobjevilo.
4. Žáci střední školy měli, podle mého očekávání, tendenci pro ně zajímavou vlastnost přiřadit nějaké význačné křivce. Objevovaly se tak mezi řešeními například části kuželoseček. Zejména měli žáci snahu sestrojit část paraboly (pět případů), ale také hyperboly (dva případy) a v jednom případě elipsy.
5. U žádného ze žáků se v rozporu s mým očekáváním jako řešení neobjevila část kružnice.
6. Žádný z žáků neznal cykloidu. Když jsem středoškolákům popsal, jak křivka vzniká, a vyzval je k sestrojení grafu, zaměňovali ji s funkcí sinus.

Žáci, se kterými jsem rozhovory vedl ve škole, dráhu různě měnili a měřili, jak dlouho kuličce trvá dráhu urazit. Přestože pro některé žáky byla úloha obtížná

na prvotní pochopení, protože znali úlohy podobného typu, kde však bylo cílem něco jiného, zdá se, že žáci nějakou intuitivní představu o tvaru křivky, která bude splňovat zadané podmínky, mají. Po rozbití úvodních miskoncepcí (experimentálně – žáci byli vyzváni zkoušet další tvary a sami tak došli k názoru, že úsečka není nejvhodnější) se žáci vždy dostali ke konvexnímu řešení, které tvarem mohlo cykloidě odpovídat.

Ptal jsem se jich proto, zda o konkávním řešení alespoň uvažovali nebo ho hned zamítli. Odpověď byla vždy taková, že je ani nenapadlo o takovém řešení přemýšlet. Stejně tak žáci nepřemýšleli nad řešeními, kdy by se bod pohyboval do kopce a opět z kopce, nebo nad řešením, kdy by část křivky byla níže než koncový bod.

Pozoroval jsem, že po vyloučení úsečky žáci přemýšleli tak, že si správně uvědomili potřebu dostatečně prudkého svahu a zároveň potřebu posouvat se blíže ke koncovému bodu – tedy že nestačí sestrojít pravý úhel. Tvarem se blížili správnému řešení, křivku pouze neuměli správně nazvat.

Důležité je také to, kde intuice selhala – v tendenci sestrojený tvar označit za nějakou kuželosečku, které mají mnoho vlastností, s nimiž se již žáci setkali a považují je za důležité. I toto selhání však lze hodnotit kladně optikou historického vývoje problému – část kružnice (kterou sice jako jedinou z kuželoseček nikdo z žáků, se kterými jsem rozhovor vedl, nevybral) jako řešení *brachistochrony* zvolil i Galileo (viz kapitola 4.4).

Argumenty pro výběr kuželoseček opět byly podobné jako u prvních otázek – „známe je ze školy“, „hezky se kreslí“, „vždycky je to něco hezkého“.

Posledním postřehem je, že žákovskou intuici v mém pozorování často ovlivnilo učivo, které bylo v nedávné době probíráno a na první pohled s problémem nějak souvisí (*zákon zachování mechanické energie* a právě kuželosečky).



V řešení prvních tří otázek se objevil stejný přístup – žáci vybírali známé objekty jako řešení tam, kde neznali odpověď. Příčinou může být i to, že ve školské matematice tento postup obvykle skutečně funguje – pokud se probírají kuželosečky a úloha se ptá na nalezení křivky nějakých vlastností, pravděpodobně odpověď nebude jiná než některá z kuželoseček, o kterých se žáci právě učí.

#### 7.3.4 Steinerův problém a jeho fyzikální modely

Má očekávání u otázky týkající se *Steinerova problému* byla taková, že někteří žáci budou experiment s mýdlovými blánami znát a odhalí tak snadno, co pokus ukazuje. Pokud žáci znát pokus nebudou, budou alespoň vědět, proč mýdlové bubliny mají tvar koule, z čehož bude možné je následně navést k tendenci kapaliny minimalizovat povrchové napětí, a tedy i povrch. Očekával jsem také, že žáci budou bod, který v pokusech vzniká, označovat za těžiště, ortocentrum, či střed kružnice opsané, nebo vepsané.



Obrázek 54: Žákyně pracující s pomůckou pro nalezení *Toricelliho bodu*

Žákům jsem zadal úlohu k řešení a dal k dispozici pomůcky, které jim mohou pomoci. Tato metoda však neměla příliš velký úspěch. Žáci nebyli zvyklí takto pracovat a nevěděli, jakou cestou se vydat.

Mnohem lépe se osvědčilo, když jsem žákovi problém představil, ilustroval na příběhu tří měst, která chtějí postavit co nejlacinější silnici, a seznámil je s případem aerolinek a spojovací společnosti. Následně jsem žáka nechal samostatně o problému bádát a teprve poté jsme společnými silami pokus předvedli (viz obrázek 54 na straně 129).

Žák již ze svého snažení a příběhu neúspěchu spojovací společnosti věděl, že řešení takového problému není triviální a není proto špatně se při řešení dopouštět omylů.

Následné řešení pomocí fyzikálního pokusu (zejména pomocí bublin) pak bylo doprovázeno jakousi fascinací, až nadšením (žáci chtěli sami zkoušet další konfigurace pro trojúhelník, následně jsem jim ukazoval i čtyřúhelník).

V některých případech také následovala otázka: „Jako...?“. To hodnotím velice kladně, jelikož hravá podstata metody v žácích, se kterými jsem pracoval, obvykle vzbudila zvědavost, zájem o problém a o pochopení jeho podstaty.

Třetí přístup, který jsem zvolil při online rozhovorech, byl takový, že jsem žákům experiment předvedl a následně se jich zeptal, jakou vlastnost kritický bod má. Jak v případě se závažími, tak v případě s bublinami žáci nejčastěji, podle mého očekávání, odhadovali, že bod je těžištěm trojúhelníku. Také se objevila teorie, že bod je stejně vzdálený od všech tří vrcholů, když jsou závaží stejně těžká (střed kružnice opsané).

Všiml jsem si, že žáci se snaží pracovat s problémem jako s obrázkem: „Zdá se, že bod leží na průniku výšek“, odpovídali někteří, protože na první pohled se zdálo, že protažení provázku bude tvořit výšku. Žáci neměli snahu využít fyzikálních vlastností, které platí, nepřemýšleli, proč je daná konfigurace taková, jaká je,

ale pouze nad výsledným obrázkem. Jako kdyby odmysleli všechny pro ně rušivé prvky – závaží, přečnívající provázek. Stejně tak mýdlovou bublinu již neuvažovali, jednalo se v jejich očích pouze o úsečku.

Dále mě zaujal případ, kdy jeden žák přemýšlel, zda záleží na délce provázků, na nichž jsou závaží zavěšena, a měl pocit, že je to špatně, když nejsou všechny stejně dlouhé.

Na správnou odpověď žáci takto sami nepřišli. U mýdlového experimentu jsem se žáky snažil navést na správnou cestu tím, že jsme se bavili o bublinách a důvodu, proč mají tvar koule. V šesti případech žáci věděli, že jsou tak nejstabilnější a poloha je nejméně energeticky náročná, minimální vlastnost povrchu však neznali ani neodvodili. Po vysvětlení jsme se vrátili zpátky k našemu experimentu. Ptal jsem se, co bude minimálního tam. Ke správné odpovědi touto cestou žáci základní školy v mém zkoumání sami nedošli až na jeden případ. Žáci střední školy nakonec v pěti případech ano.

Experiment se závažími žáci sami také nedokázali vysvětlit, ale po mém vysvětlení jim to podle jejich slov již nepřišlo těžké. Tedy až na část, kdy jsme si pomocí rovnováhy sil ukázali, proč je velikost úhlu mezi provázky  $120^\circ$ .

Přestože žákovská řešení úlohy nenaplnila má očekávání týkající se potenciálu úloh tohoto typu jako úloh pro badatelsky orientovanou výuku, kladně hodnotím to, že úloha i její řešení žáky zaujala. Řešení a ověřování pomocí fyzikálních pokusů také bylo pro žáky velmi přesvědčivé.

### 7.3.5 Odvození pomocí nerovnosti

U otázky, kde měli žáci střední školy pomocí nerovnosti dojít k důkazu tvrzení, že čtverec je největší pravoúhelník, žáci z počátku nevěděli, jak problém uchopit a jak na něj. K dispozici měli odvozenou nerovnost. Tu se dva z nich snažili upravovat do takového tvaru, ze kterého by vztah mezi obsahy obdélníku a čtverce byl patrný.

To se jim ale nepovedlo a po chvílce úprav snažení vzdali. Ostatní žáci vůbec netušili, jak s úlohou pracovat.

Poradil jsem jim proto (ve všech případech), aby si nakreslili obrázky obdélníku a čtverce, popsali je a představili si, že k dispozici mají „provázek“ délky  $o$  a tato délka odpovídá obvodu nějakého obdélníku o stranách  $a$  a  $b$  – tedy že platí  $o = 2a + 2b$ .

Zatímco u obdélníku neměli žáci problém dopsat, že jeho obsah  $S$  bude  $ab$ , jako problém se ukázalo vyjádření obsahu čtverce pomocí  $a$  a  $b$ , a to u všech žáků až na jednoho. Žákům jsem ukázal přechod z obdélníku na čtverec pomocí provázku, aby si uvědomovali konstantnost obvodu. Ve čtyřech případech však žáci opět tvrdili, že obsah čtverce bude také  $ab$ , protože se obvod nezměnil (a to i přesto, že úlohu jsme řešili jako poslední a s isoperimetrickou úlohou tak již pracovali). Tři žáci správně o straně čtverce tvrdili, že bude mít délku „něco mezi  $a$  a  $b$ “, a když jsem souhlasil a ptal se, co konkrétně mezi nimi, došli dva z nich k odpovědi, že půjde o aritmetický průměr. Odtud se již k obsahu čtverce dostali. Pouze v jednom případě žák sám dokázal vyjádřit obsah tak, že si délku strany čtverce vyjádřil jako čtvrtinu obvodu obdélníku a umocnil na druhou. Touto cestou jsem se posléze rozhodl navést i žáky, kteří si nevěděli sami rady.

Závěrečné úpravy a užití nerovnosti již nepředstavovalo v rozhovorech větší problém. Žáci také dokázali postup dobře shrnout a rekapitulovat.

Ptal jsem se žáků, kteří již před naším rozhovorem znali fakt, že pravoúhelníkem s největším obsahem je čtverec, zda se s takovým řešením setkali. Všichni tři úlohu uměli řešit užitím derivace. Vyzval jsem je, aby mi postup předvedli.

Žáci si vybavovali, jak pracovali: „Spojovali jsme nějaké dva vzorečky a pak se to derivovalo...“ Žáci měli ale problém funkci nalézt. Také mi připadalo, že si neuvědomují, že se vůbec o nějakou funkci jedná, a pouze mají naučený postup. Ptal jsem se totiž, proč se to má derivovat, a odpověděli, že tak se tento typ úloh

prostě řeší. Když jsem se ale zeptal, na co ještě umí derivaci použít, všichni tři dokázali odpovědět, že na sestrojení grafu a že tak hledají minimum a maximum funkce. Zeptal jsem se, zda nejsou náhodou ty „spojené vzorečky“ také funkcí. Podle žáků však funkce je jen: „Ypsilon se rovná něco ... a jde to nakreslit do souřadnic jako graf.“

Z povídání o derivacích se žáky, kteří je probírali, jsem získal dojem, jako kdyby pro ně funkce byla pouze tím abstraktním obrázkem, jehož vlastnosti se v hodinách určují, ale ničím, co může mít konkrétní využití. Také mi připadalo, že znalosti používané k určení průběhu funkce a řešení optimalizační úlohy na sebe nedokázali vhodně napojit, pouze používali stejný výpočetní aparát.

Dále mě zaujala následující věta jednoho z žáků, který nejprve zmínil potřebu vypočítat druhou derivaci, aby si ověřil, zda mu vyšlo maximum, nebo minimum. Na to pak navázal slovy: „Neučili jsme se ale, co dělat, když chci maximum a omylem mi vyjde minimum. Naštěstí to vždycky nějak ale vyjde!“

### 7.3.6 Úloha s pohybem po schodišti

Tuto úlohu jsem řešil (narozdíl od ostatních) s pěti žáky základní školy a dvěma středoškoláky.

Žádný z žáků neuvažoval možnost, kdy by Irena šla směrem dolů nebo Juraj směrem nahoru, a tak počet možných řešení velmi rychle omezili na konečný. Žáci se ptali, zda je možné, aby některé z dětí zůstalo na místě. Odpověděl jsem, že ano, a žáci tyto možnosti pak označovali za správné. Tři žáci zmínili, že na místě zůstane Irena nebo Kamila, ve dvou případech zmínili i Juraje. Tuto možnost však oba žáci po porovnání počtu kroků se situací, kdy na místě stojí Irena, sami zamítli. Pokud by se Juraj nepohyboval po dvou schodech, byla by možnost, že Kamila zůstane na místě, správná.

Dalším nápadem, který se u jedné žákyně objevil, bylo použít aritmetický průměr a zprůměrovat čísla pět, deset a patnáct. Tato metoda, ač nefunguje, může opět poukazovat na snahu nasadit na úlohu „něco významného“, obdobně jako u kuželoseček a isoperimetrické úlohy.

Vždy, když žáci navrhli nějaké řešení, zeptal jsem se, zda jsou si jistí, že nikdo už nedokáže najít řešení s menším počtem kroků. Tím jsem je chtěl navést k systematickému vyloučení ostatních možností.

Na správnou odpověď žáci nakonec ve všech případech přišli, ve třech případech si však nebyli jistí, zda neexistuje další, lepší řešení. Zbylí žáci úlohu vyřešili tak, že vyzkoušeli všechny schody mezi Irenou a Jurajem a dopočítali počet kroků. Žádný žák nevyužil toho, že Juraj se pohybuje pouze po lichých schodech, a tedy není nutné testovat všechny schody.

Žádný žák se nesnažil použít tabulku k zápisu. Pracovali místo toho s obrázkem schodiště, kde si ve čtyřech případech obloučky znázorňovali pohyby, které počítali. Pátý žák pro reprezentaci žáků na schodišti používal pastelky, které posouval. Dva žáci místo pastelek použili své prsty.

Výsledky si čtyři žáci zapisovali ve tvarech jako  $5-10$  (myšleno pátý schod, deset kroků). U dvou z nich se místo pomlčky objevila rovnost (např.  $5 = 10$ ). Tři žáci zvolili zápis ve tvaru:

$$5. \text{ schod: } \left. \begin{array}{l} I - 0 \\ J - 5 \\ K - 5 \end{array} \right\} 10 \text{ kroků.}$$

Informaci o pořadí, ve kterém se děti po schodech pohybují, pět žáků zcela ignorovalo, ale ve dvou případech dodržovali žáci posloupnost pohybů, aniž by si uvědomili, že na tom nezáleží.

Žáci úlohu hodnotili jako zajímavou, ale objevil se i názor jedné žákyně, že úloha postrádá smysl, protože by nikdo nepožadoval sejít se na stejném schodu a udělat jen minimální počet kroků.

Všichni žáci až na jednoho mi řekli, že se s podobnou úlohou nesetkali. Jeden žák úlohu přirovnal k hádance, kde je potřeba za určitý čas přejít přes most<sup>14</sup>, tu ale neřešil ve škole, znal ji z internetu.

---

<sup>14</sup>Jedná se o hádanku, kde čtveřice lidí má přejít přes most na druhou stranu. Každému z nich trvá přejít jinak dlouho. Prvnímu minutu, druhému dvě minuty, třetímu pět minut a poslednímu deset minut. Zároveň po mostě mohou jít jen dva lidé najednou, a také s sebou musí při cestě přes most nést jediný společný zdroj světla (tedy je potřeba, aby se někdo vracel se světlem zpátky). Úkolem je najít způsob, kterým se čtveřice dostane přes most za sedmnáct minut nebo méně. Hádanku je možné nalézt například u TED-Ed (2015).

## 8 Závěr

Cílem této diplomové práce bylo prozkoumat, jak se k řešení optimalizačních úloh přistupovalo v průběhu historie, a na konkrétních úlohách ukázat možnost řešení takových problémů bez využití diferenciálního počtu. Dalším cílem bylo tyto metody blíže popsat a v rozhovorech se žáky využít a následně analyzovat žákovská řešení, jejich obtíže při řešení a nápady, které žáci měli. Tyto cíle jsou v práci splněny.

Problémy popsané v této práci byly vybírány z české, ale převážně anglické literatury věnující se této problematice. Vybírány byly na základě toho, zda je problém nebo jeho řešení vhodné zařadit do výuky, či na základě historického kontextu úlohy. Také jsem se snažil zmínit ty úlohy, které byly něčím pro vývoj optimalizace přelomové. Protože velkou částí práce je historie, snažil jsem se, kde to bylo možné, používat i původní historické prameny. To ovšem nebylo často možné, a proto jsem pracoval buď s překlady do angličtiny nebo se sekundárními zdroji. Kromě odborné literatury jsem využil i několik zdrojů popularizačních.

První kapitoly práce jsou věnovány vymezení některých pojmů, se kterými v práci dále pracuji, a odvození geometrických nerovností, které jsou také několikrát užity. Přesto ale práce neobsahuje definice všech pojmů, které jsou zmíněny, neboť problémy popsané v práci jsou z různých oblastí matematiky a výčet definic a vět by byl velice široký.

Těžiště práce tvoří kapitola nazvaná *Historie optimalizačních úloh*. Problémy v této kapitole jsou řazeny volně, obvykle tak, že jsou sdruženy do kapitol podle nějakého společného znaku (například mluví o trojúhelníku, isoperimetrické úlohy atp.). Původní snahou bylo vybrané úlohy řadit chronologicky za sebe od nejstarší po nejmladší. To ovšem nebylo možné, neboť například k důkazu *problému Dídó* je potřeba pracovat s výsledky, které nám poskytne *Heronova úloha*. Úlohy v této



kapitole mají převážně geometrický charakter a obvykle jsou i řešeny za využití geometrických postupů. Problémy jsou formulovány jako věty.

Práce dále obsahuje kapitolu věnovanou popisu smyslu využití historie matematiky jako didaktického nástroje i zdroje úloh vhodných k zařazení do výuky. Tato kapitola poukazuje na potřebu vyučovat optimalizaci i pomocí dalších metod, než je derivace, a to v posloupnosti odpovídající lidskému poznání v této oblasti. Historie optimalizace popsaná na konkrétních úlohách zase ukazuje možnost a způsoby, jak tyto úlohy řešit.

Přestože řešení mnoha úloh a důkazy některých vět v této práci jsou dlouhé a složité, obsahuje práce i takové, které k zařazení do výuky přímo vybízejí. Zejména úlohy, které je možné vysvětlit fyzikálním pokusem, mohou mít jak kladný dopad na motivaci žáků, tak být vhodné pro pěstování mezipředmětových vztahů. Úlohy tohoto typu je také možné využít pro badatelsky orientovanou výuku. Fakt, že většina geometrických problémů je řešena eukleidovsky, by měl přispět k lepšímu žákovu porozumění struktuře a řešení úlohy.

V další části práce jsou některé z metod řešení optimalizačních úloh identifikované v rámci kapitoly o historii problému blíže popsány. V kapitole je také zmíněno, proč je vhodné některé z těchto metod využít ve výuce. Přestože se metody jako intuice nebo využití fyzikálních jevů k řešení matematického problému objevily v historii optimalizace, jsem přesvědčen, že bychom tyto metody identifikovali u vývoje většiny matematických problémů.

Závěrečná část této práce je věnována popisu rozhovorů se žáky na téma optimalizace a jejich vyhodnocení. Ukázalo se například, že i mezi staršími žáky, se kterými jsem rozhovor vedl, se vyskytuje představa toho, že rovnost obvodů implikuje rovnost obsahu či obráceně. Výuka isoperimetrických úloh metodami popsanými v práci tak může nejen předcházet vzniku formálního poznání v oblasti optimalizačních úloh u žáků gymnázií, kteří hledají extrémy derivováním, ale také

může přispět k rozvoji poznání v oblastech vyučovaných na všech stupních škol jako například obvod a obsah.

Přestože vzorek žáků, se kterými jsem rozhovory vedl, nebyl veliký, překvapila mě odpověď na otázku, zda se s takovými úlohami již žáci setkali a pokud ano, kdy – v případě, že se nejednalo o žáky, kteří probírali derivace, odpověď byla, že ne. Pouze ve dvou případech si žáci vzpomněli na úlohu z maturity a na *Heronův problém*. . . V práci jsem se pokusil ukázat, že to je možné změnit a ukázat, jak některé úlohy řešit již dříve a jinak.

Přínos práce pro žáky, případně studenty, kteří mají o tento typ úloh zájem, spatřuji zejména v představení nových metod, kterými lze optimalizační úlohy řešit, a v představení dlouhé historie problému, která předcházela řešení derivováním. Metody popsané v práci mnohdy poskytují dobrý vhled do daného problému, ale také mohou žáky obohatit tím, že některé z nich jsou velmi neobvyklé.

Učitelům matematiky práce nabízí náhled na to, že je možné i složitější optimalizační problémy zařazovat do výuky již v nižších ročnících, a ukazuje vhodnou posloupnost metod a problémů. Stejně tak je v práci zmíněno, proč je vhodné tuto posloupnost dodržovat, a jaký to má přínos pro žáka. Tento přístup pak učitel může využít i u dalších témat.

## 9 Seznam použitých informačních zdrojů

- [1] ARCHIMEDES a Reviel NETZ. *The Works of ARCHIMEDES: Volume I The Two Books On the Sphere and the Cylinder*. New York: Cambridge University Press, 2004. ISBN 978-0-511-19430-6.
- [2] BLÅSJÖ, Viktor, SHENITZER, Abe a John STILLWELL, ed. *THE EVOLUTION OF...: The Isoperimetric Problem* [online]. 2005, 526-564 [cit. 2020-11-10]. Dostupné z: [https://www.maa.org/sites/default/files/pdf/upload\\_library/22/Ford/blasjo526.pdf](https://www.maa.org/sites/default/files/pdf/upload_library/22/Ford/blasjo526.pdf)
- [3] BOČEK, Leo a Jaroslav ZHOUF. *Planimetrie*. Praha: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta, 2009. ISBN 978-80-7290-404-4.
- [4] BURTON, Harry Edwin. *The Optics of Euclid*. *Journal of the Optical Society of America*. 1945, 35(5), 357–372. ISSN 0030-3941.
- [5] *Can you solve the bridge riddle?* In: Youtube [online]. 31. 3. 2021 [vid. 2015-09-01]. Kanál uživatele TED-Ed. Dostupné z: <https://www.youtube.com/watch?v=7yDmGnA8Hw0>
- [6] COURANT, Richard a Herbert ROBBINS. *What Is Mathematics?: An Elementary Approach to Ideas and Methods*. 1996.
- [7] DE CARLOS, Helena. Interpreting the Past:: Some Medieval Texts on Trojan Matter. *The Journal of Medieval Latin*. 2008, 18, 101–116. ISSN 07789750. Dostupné také z: [https://www.jstor.org/stable/45020096?seq=1#metadata\\_info\\_tab\\_contents](https://www.jstor.org/stable/45020096?seq=1#metadata_info_tab_contents)
- [8] DESCARTES, René. *Meditace o první filosofii: Námitky a autorovy odpovědi*. Praha: OIKOYMENH, 2003. Knihovna novověké tradice a současnosti. ISBN 80-729-8084-X.

- [9] FAUVEL, J., VAN MAANEN, J. *The role of the history of mathematics in the teaching and learning of mathematics: Discussion Document for an ICMI Study (1997–2000)*. Educational Studies in Mathematics 34, 255–259 (1997).  
<https://doi.org/10.1023/A:1003038421040>
- [10] FELBER, Vítězslav. Leonhard Euler. *Časopis pro pěstování matematiky a fyziky*. 1908, (37), 289–300.
- [11] *The Fermat Point of a Triangle / Geometric construction + Proof /*. In: Youtube [online]. 9.2.2020 [vid. 2020-07-15]. Kanál uživatele Think Twice. Dostupné z: [https://www.youtube.com/watch?v=wWXsajE-L\\_o&t=1s](https://www.youtube.com/watch?v=wWXsajE-L_o&t=1s)
- [12] GRÖTSCHEL, Martin, ed. *Documenta Mathematica: Optimization Stories* [online]. 2012 [cit. 2020-11-10]. Dostupné z: <https://www.zib.de/groetschel/publications/OptimizationStories.pdf>
- [13] HAMHALTER, Jan a Jaroslav TIŠER. *Funkce komplexní proměnné*. 2. vydání. V Praze: České vysoké učení technické, 2017. ISBN 978-80-01-06317-0.
- [14] HAVELKA, Bedřich. *Geometrická optika: I. díl*. Praha: Nakladatelství Československé akademie věd, 1955.
- [15] HEJNÝ, Milan a Pavel ŠALOM. *Matematika C: Pracovní sešit*. Praha: Hamat, 2018. ISBN 978-808-8247-074.
- [16] HO, Weng Kin. *Using history of mathematics in the teaching and learning of mathematics in Singapore*. Singapore, 2008. Singapore Polytechnic, Department of Mathematics and Science.
- [17] HONČÍKOVÁ, Dana. *Teorie mysli u dětí předškolního věku*. Praha, 2008. Diplomová práce. Univerzita Karlova, Filozofická fakulta, Katedra psychologie. Vedoucí práce Lenka Šulová.

- [18] JONES, Phillip S. “*The History of Mathematics as a Teaching Tool.*” *The Mathematics Teacher*, vol. 50, no. 1, 1957, pp. 59–64. JSTOR, [www.jstor.org/stable/27955320](http://www.jstor.org/stable/27955320). Accessed 30 Dec. 2020.
- [19] KLEIN, Felix. *The Arithmetizing of Mathematics*. *Bulletin of the American Math Society* [online]. 1986, 2(8), 241–249 [cit. 2021-01-01]. Dostupné z: [doi:https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1896-00340-2](https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1896-00340-2)
- [20] *Letters*. (1993). *The American Mathematical Monthly*, 100(3), 285–286. Retrieved January 1, 2021, from <http://www.jstor.org/stable/2324466>
- [21] LEVI, Mark. *The Mathematical Mechanic: Using Physical Reasoning to Solve Problems*. Princeton: Princeton University Press, 2009. ISBN 978-0-691-14020-9.
- [22] LEVI, Mark. Quick! Find a Solution to the Brachistochrone Problem. *SIAM: Society for Industrial and Applied Mathematics* [online]. 2015, 48(6) [cit. 2020-11-02]. Dostupné z: [https://sinews.siam.org/Details-Page/quick-find-a-solution-to-the-brachistochrone-problem?fbclid=IwAR0skUf6YkF2QHxSNP1bSCSkRLdGNKz\\_NEJpIXpRdsPf\\_fNCby6R8XUZU1E](https://sinews.siam.org/Details-Page/quick-find-a-solution-to-the-brachistochrone-problem?fbclid=IwAR0skUf6YkF2QHxSNP1bSCSkRLdGNKz_NEJpIXpRdsPf_fNCby6R8XUZU1E)
- [23] LOCKHART, Paul. *A Mathematician’s Lament* [online]. 2002 [cit. 2021-02-28]. Dostupné z: [https://www.maa.org/external\\_archive/devlin/LockhartsLament.pdf](https://www.maa.org/external_archive/devlin/LockhartsLament.pdf)
- [24] MARO, Publius Vergilius a Otmar VAŇORSKÝ. *Aeneis*. Praha: Městská knihovna v Praze, 2018. ISBN 978-80-7602-149-5.
- [25] NAHIN, Paul J. *When Least Is Best: How Mathematicians Discover Many Clever Ways to Make Things as Small (or as Large) as Possible*. 5. Princeton University Press, 2007. ISBN 978-0-691-13052-1.

- [26] MONKS, Kenneth M. *Fermat's Method for Finding Maxima and Minima* [online]. 2019, , 1–3 [cit. 2021-02-27]. Dostupné z: [https://digitalcommons.ursinus.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1011&context=triumphs\\_calculus](https://digitalcommons.ursinus.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1011&context=triumphs_calculus)
- [27] NIVEN, Ivan. *Maxima and Minima Without Calculus*. The Mathematical Association of America, 1981. ISBN 088385306X.
- [28] OLSSON, Lennart, Georgy S. LEVIT a Uwe HOSSFELD. The “Biogenetic Law” in zoology: from Ernst Haeckel’s formulation to current approaches. *Theory in Biosciences* [online]. 2017, 136(1–2), 19–29 [cit. 2021-02-02]. ISSN 1431-7613. Dostupné z: [doi:10.1007/s12064-017-0243-4](https://doi.org/10.1007/s12064-017-0243-4)
- [29] “*On the Mathematics Curriculum of the High School.*” The American Mathematical Monthly, vol. 69, no. 3, 1962, pp. 189–193. JSTOR, [www.jstor.org/stable/2311046](http://www.jstor.org/stable/2311046). Accessed 28 Dec. 2020.
- [30] PENNINGS, Timothy J. Do Dogs Know Calculus? *The College Mathematics Journal* [online]. 2003, 34(3), 178–182 [cit. 2021-02-28]. ISSN 0746-8342. Dostupné z: [doi:10.1080/07468342.2003.11922003](https://doi.org/10.1080/07468342.2003.11922003)
- [31] POJSL, Josef. Geometrické algoritmy I. [online]. Brno, 1996 [cit. 2020-03-05].
- [32] POLYA, George. *How to Solve It: A New Aspect of Mathematical Method*. 2. Princeton University Press, 1973. ISBN 978-0-691-11966-3.
- [33] POLYA, George. *Induction And Analogy In Mathematics: Volume I of Mathematics And Plausible Reasoning*. Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1954.
- [34] ROJO, Alberto a Anthony BLOCH. *The Principle of Least Action: History and Physics*. Cambridge: CAMBRIDGE University Press, 2018. ISBN 978-0-521-86902-7.

- [35] SANDERSON, Grant a Steven STROGATZ. *The Brachistochrone, with Steven Strogatz* In: Youtube [online]. 1. 4. 2016 [cit. 2020-09-30]. Dostupné z: <https://www.youtube.com/watch?v=Cld0p3a43fU&t=163s>. Kanál uživatele 3Blue1Brown.
- [36] SERVÍT, František. *Eukleidovy Základy (Elementa)*. Praha: Jednota českých matematiků a fysiků, 1907.
- [37] SCHRIJVER, Alexander. *On the History of the Shortest Path Problem* [online]. 2010, 155–163 [cit. 2020-11-10]. Dostupné z: [https://www.math.uni-bielefeld.de/documenta/vol-ismmp/32\\_schrijver-alexander-sp.pdf](https://www.math.uni-bielefeld.de/documenta/vol-ismmp/32_schrijver-alexander-sp.pdf)
- [38] SOOTHILL, Germander. *The Euclidean Steiner Problem* [online]. 2010 [cit. 2021-02-04]. Dostupné z: [http://fourier.dur.ac.uk/Ug/projects/highlights/CM3/Soothill\\_Steiner\\_report.pdf](http://fourier.dur.ac.uk/Ug/projects/highlights/CM3/Soothill_Steiner_report.pdf)
- [39] SUZUNO, Kohta, Daishin UYAMA, Michal BRANICKI, Rita TÓTH, Artur BRAUN, István LAGZI . Maze Solving Using Fatty Acid Chemistry. *Langmuir* [online]. 2014, 30(31), 9251–9255 [cit. 2021-02-28]. ISSN 0743-7463. Dostupné z: doi:10.1021/la5018467
- [40] TOEPLITZ, Otto. *The Calculus: A Genetic Approach*. Chicago: The University of Chicago Press, 2007. ISBN 978-0-226-80668-6.
- [41] TIKHOMIROV, Vladimir M. *Stories about Maxima and Minima*. American Mathematical Society, 1986. ISBN 0-8218-0165-1.
- [42] WAGON, Stan. *Mathematica in Action: Problem Solving Through Visualization and Computation*. 3. New York: Springer, 2010. ISBN 978-0-387-75366-9.

- [43] ZHOUF, Jaroslav. *Písenné maturitní zkoušky do gymnaziálních tříd se zaměřením na matematiku*. V Praze: Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta, 2007. ISBN 978-807-2902-880.